

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Física Teórica II (Métodos Matemáticos de la Física)



TESIS DOCTORAL

Inflación e inhomogeneidades en cosmología cuántica de lazos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Javier Antonio Olmedo Nieto

Director

Guillermo A. Mena Marugán

Madrid, 2013

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Físicas

Departamento de Física Teórica II



Tesis Doctoral

Inflación e Inhomogeneidades
en Cosmología Cuántica de Lazos

Javier Antonio Olmedo Nieto

Instituto de Estructura de la Materia

Consejo Superior de Investigaciones Científicas



Director de tesis:

Dr. Guillermo A. Mena Marugán

Madrid, 2012

*“No hay nadie menos afortunado
que el hombre a quien la adversidad olvida,
pues no tiene oportunidad de ponerse a prueba.”*

L. A. Séneca

Agradecimientos

La investigación que ha desembocado en esta tesis doctoral ha sido financiada por la beca-contrato JAE-Pre_08_00791 del Programa “Junta para la Ampliación de Estudios” (Programa JAEPredctoral) del CSIC.

Por supuesto, esta tesis no hubiera podido ser desarrollada hasta este nivel sin la dirección de Guillermo. Quiero darte las gracias porque has sido un ejemplo a seguir, no sólo científicamente, sino, lo que es más importante, como persona (y amigo). Has sido un apoyo imprescindible. ¡Gracias! También quería agradecer a Luis y a Zé todo el apoyo y buenos ratos que hemos compartido, y especialmente a ti, Luis, por la confianza que siempre has depositado en mí.

También quería dar las gracias a Dani, Gil, Laura, Merce, Mikel, y Tomek, y a todos los demás compañeros del instituto (que no nombro aquí, porque la lista sería interminable). Habéis sido una compañía indispensable.

Asimismo quería agradecer a todos mis amigos, pero sobre todo a Gabi, Jaime, Lolo, Mamen, Marcos, Pablillo, Raúl, Roque y Sandra. Los buenos y malos ratos que hemos pasado juntos, que nos han hecho crecer, y de los que ahora nos reímos.

Igualmente tengo muy presente a Hanfri, Conchi, Madalena y Pepe. Estéis donde estéis, siempre os llevaré conmigo en mis recuerdos.

No voy a pasar por alto a mis hermanos Nacho y Dani, con los que he crecido, y que han tenido que soportarme. Y sobre todo a mis padres, que me dieron la vida, la educación y la cultura de la que me siento tan orgulloso. Sin vosotros, nada de esto habría sido posible. ¡Muchas gracias, papá y mamá!

También quiero agradecer a los que considero parte de mi familia: Clara, Maleni y Maxi. Por los valores que me habéis enseñado estos últimos años. Y, por encima de todo, a ti, Yasmina. No existen palabras con las que expresar mi gratitud hacia ti. Todo el apoyo, el ánimo, las risas y lágrimas; tu entereza y rectitud, y esa fuerza que te caracteriza y que ensombrece a cualquiera. Gracias por el cariño y la complicidad que tanta felicidad, que ninguna persona más que tú, me ha dado. ¡GRACIAS DE CORAZÓN!

Índice general

Abstract	5
Introducción	9
Estatus y planteamiento	9
Estructura de la tesis y objetivos	14
Cosmología homogénea	21
1. Revisión de la cosmología cuántica de lazos	21
1.1. Descripción clásica	21
1.2. Modelo cuántico	26
2. Nueva perspectiva en cosmología de lazos	39
2.1. Nueva prescripción	40
2.2. Autofunciones generalizadas	45
2.3. Espacio de Hilbert físico	48
2.4. Consecuencias físicas y novedades	49
2.5. Discusión y conclusiones	50
3. Estudio numérico	53
3.1. Prescripciones	54
3.2. Medición de las diferencias entre prescripciones	61
3.3. Estudio numérico	63
3.4. Discusión de los resultados	74

3.5. Conclusiones	77
Resultados de unicidad	89
Introducción y motivación	89
4. Criterios de unicidad	93
4.1. Sistema clásico	93
4.2. Representación cuántica	100
4.3. Unicidad de la representación	103
4.4. Unicidad de la parametrización del campo	111
4.5. Conclusiones	120
5. Extensión a topologías compactas	123
5.1. Sistema clásico	123
5.2. Representación cuántica	127
5.3. Unicidad de la representación	128
5.4. Unicidad de la parametrización	134
5.5. Conclusiones	143
Modelos inflacionarios	149
6. Cuantización de perturbaciones	149
6.1. Sistema clásico	151
6.2. Fijación de gauge y transformación canónica	155
6.3. Dinámica clásica	161
6.4. Unicidad de la cuantización	162
6.5. Potenciales de Bardeen	169
6.6. Discusión y conclusiones	173
7. Cuantización híbrida	177
7.1. Modelo homogéneo	179

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
7.2. Cuantización híbrida	184
7.3. Conclusiones	190
Conclusiones	193
Conclusions	199
Apéndices	207
A. Geometrodinámica	207
B. Armónicos en la tres-esfera	209
C. Convergencia de las funciones oscilatorias	211
C.1. Secuencias de funciones oscilatorias	211
C.2. Secuencias de productos	212
D. Operador de Laplace-Beltrami	215
E. Transformación unitaria	217
Publicaciones	219
Bibliografía	221

Abstract

The gravitational interaction, in spite of being one of the fundamental interactions of nature, is still lacking a satisfactory quantum description. The most accurate theory that we know to describe the gravitational phenomena is general relativity. But this is a classical theory, and there exist situations in which its predictions are not reliable, like e.g. the cosmological big bang singularity or the spacetime singularity of a black hole.

One of the most promising candidates to combine general relativity with quantum mechanics is known as loop quantum gravity. It consists in a non-perturbative, background independent, canonical quantization of general relativity. Although considerable progress has been done in establishing the kinematical arena and partially the physical sector of this theory, the quantization program is not finished yet.

In order to understand the underlying problems preventing the completion of such a quantization program, a common procedure is to discuss the quantization of related simpler models which at least encode some of the properties of the complete theory. This is the purpose of loop quantum cosmology. The aim is twofold: on the one hand, as we have mentioned, one can learn how to deal with the obstacles found in the quantization of gravity; on the other hand, one can derive new phenomenology in high energy physics, in situations in which the quantum nature of gravity is expected to emerge. This is the case of homogeneous and isotropic scenarios for the early universe, whose quantization in the context of loop quantum cosmology predicts that the classical singularity is indeed replaced by a quantum bounce. The simplest model studied in this context is a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) spacetime coupled to a massless scalar field. In spite of the outstanding role played by the model within loop quantum cosmology, there still remain some aspects of its quantization which deserve a special attention. The list of questions include a suitable removal of the classical singularity, an adequate procedure to modify the densitization weight of the Hamiltonian constraint in a rigorous manner, the way in which the discretization of the geometry encoded in the superselection sectors of the theory can be simplified while preserving the relevant physical properties, and a complete understanding of the

Wheeler-deWitt limit of the theory in those sectors. In particular, in this thesis we revisit the main characteristics of this cosmological model. We present a new prescription for the quantization of the Hamiltonian constraint that allows us to answer all the questions mentioned above. Actually, our proposal decouples the zero volume state, so that all considerations can be restricted to its orthogonal complement. There, one can establish a bijection between the solutions of the Hamiltonian constraint and the ones of its densitized version. This constraint, together with the physical observables, superselects sectors. On them, the elementary observables that capture the information about the discreteness of the geometry are functions of the physical volume with support in discrete semilattices, formed by points that are separated by a constant step in the real half-line. The solutions to the constraint possess optimal physical properties: they emerge out of a minimum non-vanishing volume, and extend in the large volume regime to reach a well-defined asymptotic limit of exact standing waves. This property allows one to prove that any state constructed out of the basic bricks for the geometry must irremediably show a quantum bounce, replacing the classical singularity.

There are several non-equivalent proposals providing a quantization of the FLRW model with a massless scalar field. Here, we study, analytically and numerically, the discrepancies among the proposal by Ashtekar, Pawłowski and Singh; a simplified and explicitly solvable version of that one suggested by Ashtekar, Corichi and Singh; the prescription proposed in this thesis; and its simplified version, which shares the good properties of the second and third proposals. We confront this problem in different ways. On the one hand, in a suitable representation, the gravitational counterpart of the Hamiltonian constraint can be written as a second order differential equation subject to a given potential, whose multiplicative constant partially characterizes the specific prescription. Besides, we compare the superselection sectors that emerge in each case, and which affect the physical Hilbert space structure. On the other hand, the solutions to the constraint built with one of the proposals are not solutions, in general, to those of another realization of the constraint. We therefore compare them, and the expectation values and dispersions they provide for some interesting observables in cosmology, detecting discrepancies among prescriptions, and proving that the physical picture they supply is actually different. Moreover, the prescriptions analyzed here show considerably different numerical efficiencies.

In order to increase the complexity of the studied cosmological systems and bring them closer to realistic scenarios, it is necessary the inclusion of local degrees of freedom, usually described by fields. Since we lack a genuine and trustworthy quantization of these entities adopting loop quantization techniques, an appealing alternative is to apply a standard Fock description to them. Even in this favorable situation, there exists an infinite ambiguity in the choice of representation for the canonical commutation

relations, undermining the significance of the quantum predictions. This problem can be solved by invoking the symmetries of the background spacetime in which the fields propagate. But, if the symmetries are not sufficient to remove the ambiguity, additional requirements must be included. Fortunately, in the case of nonstationary spacetimes with compact spatial sections, the conditions of invariance under the spatial isometries and a unitary implementation of the dynamics turn out to pick up a unique equivalence class of unitarily equivalent Fock representations.

These uniqueness criteria had been applied in the literature to situations in which either the background spacetime has a specific compact spatial section of a certain topology and/or one accepts as fundamental a particular description (or parametrization) of the fields that are to be represented as quantum operators. In this thesis, we review these criteria for the unique Fock quantization of a scalar field subject to a time-dependent quadratic potential propagating in a static spacetime with compact spatial sections with the topology of three-spheres. Then, we deal with the extension of the range of applicability of these criteria, considering different descriptions for this field theory related by means of time-dependent linear canonical transformations which consist of a scaling of the original field by a function of time, the inverse scaling of its conjugate momentum and the addition to it of a contribution which is linear in the field and proportional to another time-dependent function. We show that this type of transformations is forbidden by our criteria, except in the trivial case of a constant transformation. Additionally, we further generalize the validity of the uniqueness results by including the case of a scalar field propagating in spacetimes with compact spatial sections that are now allowed to have an arbitrary topology, in any spatial dimension $d \leq 3$. If such sections possess a group of symmetries (isometries, in general), the requirement of invariance of the vacuum state under this group of transformations and a unitary implementation of the dynamics allows one to select a unique Fock quantization for the field (up to unitary changes). Moreover, we also consider time-dependent linear canonical transformations, as mentioned above for the three-sphere, but now for any compact spatial section in three or less dimensions, regardless of its topology. This kind of transformations leads to a new field description, with a different dynamics. We are able to prove that any non-constant scaling of the field is incompatible with a unitary implementation of the new dynamics. Besides, we show that for spatial sections with dimension $d = 2, 3$, no additional term linear in the field is acceptable in the transformed momentum. But for compact sections in one dimension, this type of time-dependent contribution of the field in the redefined momentum is compatible with a unitary implementation of the dynamics. However, it does not lead to any new Fock quantization that is not equivalent to the originally considered one, therefore respecting the uniqueness.

The main aim of this thesis is to carry out the quantization of an inflationary universe with small inhomogeneities. This kind of cosmological scenarios can provide a natural explanation for the evolution of our universe from the hot big bang to its present state. In this thesis, we study one of the simplest models capturing the most relevant aspects of inflation: a massive scalar field propagating in a closed homogeneous and isotropic spacetime with small inhomogeneities. We start with a homogeneous and isotropic situation in which we include small inhomogeneities as perturbations. These perturbations are described by constrained local degrees of freedom. In order to remove the unphysical ones, we adopt a gauge fixing, followed by a suitable, complete canonical transformation. The reduced system is described by a scalar field propagating in a FLRW spacetime minimally coupled to a homogeneous massive scalar field. We prove that the criteria of invariance under the spatial isometries and a unitary implementation of the dynamics select a unique Fock representation for the local degrees of freedom. Moreover, repeating our quantization program for an alternative gauge fixing, we reach (qualitatively) identical conclusions. We also adopt two other Fock descriptions, one of them in terms of gauge invariant Bardeen potentials, and both unitarily equivalent to the previous ones.

Finally, we complete our study by including the interaction of the perturbations and the background spacetime, both treated quantum mechanically. In doing so, we combine a quantization of the background spacetime by means of loop techniques with the Fock description of the inhomogeneities explained above. We first show that, for the purely homogeneous spacetime, we can completely characterize the solutions to the Hamiltonian constraint, constructed out of their data on the minimum volume section (allowed by the intrinsic discretization of the geometry). We then endow this space of initial data with a suitable inner product, providing a Hilbert space structure that determines the physical states of the system. When inhomogeneities are included, a suitable combination of the standard Fock representation and the nonstandard loop quantum one allows us to quantize to completion the model. Again, we prove that the solution to the full (homogeneous plus inhomogeneous) constraint can be determined out of the data on the minimum volume section, and construct the physical Hilbert space by selecting an adequate inner product for these data.

Introducción

Estatus general y planteamiento de los problemas

La interacción gravitatoria, a pesar de haber sido la primera fuerza fundamental en ser formulada en el lenguaje de la física newtoniana, y posteriormente haber sido extendida por Einstein a lo que ahora conocemos como relatividad general, sigue teniendo una descripción puramente clásica. Si bien la relatividad general ha permitido profundizar, por ejemplo, en el entendimiento del colapso de estrellas y los procesos por los que pueden formarse agujeros negros, e incluso ha aportado una visión sobre el origen del universo, esta teoría pierde su capacidad de predicción en aquellas situaciones en las que la gravedad se hace suficientemente intensa, como ocurre en torno a la singularidad espaciotemporal asociada a un agujero negro o a la singularidad inicial de la gran explosión (o en inglés *big bang*) de la que surgió el universo.

Una posible respuesta a estas cuestiones es que, al tratarse de una teoría clásica, uno debería en realidad incluir correcciones de naturaleza cuántica en todos aquellos fenómenos de altas densidades de energía o curvaturas extremas. Aunque aún carecemos de una teoría cuántica completa para la gravedad, sí que existen candidatos firmes a este respecto. Uno de ellos es la denominada gravedad cuántica de lazos [1–4], en la que está basada parte de esta tesis. Se trata de una cuantización canónica de la relatividad general, no perturbativa e independiente de estructuras de fondo. Dado que la relatividad general es una teoría invariante bajo difeomorfismos espaciales y reparametrizaciones temporales, irremediablemente conduce a una teoría con ligaduras. Para cuantizar sistemas con ligaduras, el programa de cuantización de Dirac [5] sirve de punto de partida. En él, uno comienza ignorando las ligaduras, representa un álgebra de operadores, construida a partir del espacio de fases clásico, en un espacio vectorial complejo. A partir de estos operadores, se construyen los correspondientes a las ligaduras y se determina el kernel de los mismos. En general, el kernel de las ligaduras proporciona un espacio vectorial no trivial que, al dotarlo de estructura de espacio de Hilbert, incluye las soluciones físicas del sistema (aquellos estados que re-

sultan ser normalizables). En este marco, la gravedad cuántica de lazos ha tenido un éxito considerable, ya que las ligaduras asociadas a los difeomorfismos espaciales permiten determinar de manera unívoca la representación del álgebra de los operadores fundamentales (holonomías y flujos) [6–8], lo que dota de consistencia y robustez a la descripción cuántica. Desafortunadamente, la ligadura hamiltoniana –identificada con la dinámica– aún no ha podido ser incluida consistentemente en la teoría, aunque existen propuestas alternativas en las que se puede llegar a una cuantización satisfactoria si se admite la presencia de cierto contenido material específico [9–11].

Una manera en la que se pueden entender cuáles son los problemas subyacentes que impiden alcanzar una teoría cuántica aceptable es abordar la cuantización de modelos gravitacionales más simples que de una forma u otra comparten aspectos con la teoría completa. Es aquí donde entra en juego la cosmología cuántica de lazos [12–17]. Este campo de investigación, que trata sobre la cuantización de sistemas cosmológicos (usualmente tras imponer una reducción por simetría en el nivel clásico) empleando el programa de la gravedad cuántica de lazos, pretende hacer frente a dos cuestiones: por un lado, desarrollar nuevos métodos que puedan ser aplicados a la teoría completa, y, por otro, empezar a indagar posibles predicciones de la teoría cuántica, que pueden servir no sólo como prueba de su consistencia, sino también para poner de manifiesto fenómenos físicos de altas energías a los que aún no se tiene acceso. Los primeros trabajos que sirvieron de germen de esta rama de la cosmología cuántica se deben a Bojowald [18–21]. En ellos, se presentó un estudio parcial de cómo se pueden adaptar las técnicas de cuantización de la gravedad de lazos a un espaciotiempo homogéneo e isótropo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) con secciones espaciales planas. Tras establecer rigurosamente su estructura cinemática [22], se comenzó a analizar la dinámica cuántica del sistema acoplado a un campo escalar sin masa [23, 24]. Después de un estudio exhaustivo de la dinámica, llevado a cabo en la Ref. [25], se pudieron diferenciar claramente los regímenes genuinamente cuánticos de los semiclásicos. Éstos últimos describían con gran precisión la dinámica clásica, mientras que los primeros eran responsables de un rebote cuántico que conecta determinísticamente dos universos semiclásicos, uno en expansión y otro en contracción. Este fenómeno, que reemplaza a la singularidad clásica inicial correspondiente a la gran explosión, se conoce como gran rebote (o *big bounce* en inglés). Un estudio posterior más detallado [26], en el que se propone una prescripción nueva para la cuantización de este escenario cosmológico introduciendo ciertas simplificaciones respecto a la de la Ref. [25], permitió generalizar el concepto de rebote cuántico al probar que es una propiedad general de todos los estados físicos del sistema, siempre y cuando se restrinja el estudio a una discretización particular de la geometría. A pesar de que estos estudios han resultado ser fundamentales dentro de la cosmología cuántica

ca de lazos, existen cuestiones técnicas y físicas que aún deben ser respondidas con claridad. Entre ellas se encuentra el procedimiento comúnmente conocido como *densitización* de la ligadura escalar. Este procedimiento permite alcanzar una descripción más adecuada del sistema, ya que posibilita una separación explícita entre la parte material y la geométrica mediante un cambio de densitización adecuado en la ligadura hamiltoniana. Los procedimientos empleados en las Refs. [25–27] no resultan del todo satisfactorios, bien porque implican redefiniciones de la ligadura que en situaciones con menos simetría podrían ser inabordables, o bien porque se introduce una densitización en el nivel clásico que en este sistema en concreto no resulta ser problemática, pero que, en un escenario más general, podría conllevar serias dificultades [1]. Otra cuestión que nos llama poderosamente la atención es la manera en la que la discretización de la geometría codificada en los sectores de superselección que emergen en el modelo puede ser simplificada considerablemente mientras se mantienen sus buenas propiedades físicas. Además, nos gustaría entender cómo se podrían generalizar los resultados de la Ref. [26] para deducir si realmente el rebote cuántico es una característica general del modelo, independiente también de los sectores de superselección. Finalmente, dado que existen diferentes prescripciones para cuantizar este sistema cosmológico dentro del contexto de la cosmología cuántica de lazos, sería interesante investigar cuáles son las diferencias tanto cualitativas como cuantitativas que surgen entre ellas.

La descripción que proporcionan las cosmologías homogéneas e isotrópicas proporciona una buena aproximación al comportamiento del universo a gran escala, pero, si uno quiere tratar con un escenario más realista que incluya inhomogeneidades, se debe dar un paso más en la complejidad de los sistemas que se consideran. Las inhomogeneidades se pueden incluir utilizando una descripción en términos de campos con grados de libertad locales. Actualmente, se carece de una descripción cuántica genuinamente geométrica de las mismas (siguiendo el programa de la gravedad cuántica de lazos). Pero, en principio, es razonable asumir que una descripción estándar de tipo Fock [28] dé cuenta de muchos de los fenómenos cuánticos que puedan aparecer a primer orden, y podría abrir la puerta a una cuantización de lazos o polimérica¹ para estos campos. A diferencia de lo que ocurre en mecánica cuántica estándar, existen obstáculos importantes para dotar de robustez a una cuantización de un sistema con infinitos grados de libertad. Uno de los problemas fundamentales que se debe afrontar aparece al representar cuánticamente las relaciones canónicas de conmutación, puesto que diferentes representaciones resultan ser en general físicamente inequivalentes. Para elegir de entre todas ellas una representación privilegiada, en principio, uno debe invocar a las simetrías clásicas, si las hay. En el caso de espaciotiempos con suficiente simetría –por

¹Se denomina así a este tipo de descripciones cuánticas debido, esencialmente, a que los grados de libertad, en el contexto de la gravedad de lazos, están codificados a lo largo de aristas unidimensionales.

ejemplo uno de tipo Minkowski, con la simetría de Poincaré—, el grupo de simetrías permite seleccionar una cuantización privilegiada, siempre que ésta tenga un único vacío invariante bajo dicho grupo [28] (salvo transformaciones de equivalencia unitaria). Pero en situaciones más generales, como es el caso de campos propagándose en espaciotiempos curvos menos simétricos, no hay un criterio general que permita seleccionar un único representante de entre todos los vacíos posibles. Afortunadamente, estudios recientes sobre la cuantización de cosmologías de Gowdy [29,30], y que presentan ciertos criterios de unicidad [31,32], sugieren que es posible escoger una clase de equivalencia unitaria de representaciones de Fock para campos que se propagan en espaciotiempos o circunstancias más generales. En particular, en las Refs. [31,32] se probó que un campo escalar que se propague en un espaciotiempo estático con secciones espaciales de topología isomorfa a un círculo o una dos-esfera, pero sujeto un potencial cuadrático dependiente del tiempo de un tipo específico, admite en realidad una cuantización de Fock única si ésta es invariante bajo las isometrías espaciales y además la dinámica es implementable en ella como una transformación unitaria. Es más, en el caso de un potencial cuadrático dependiente del tiempo arbitrario, en el círculo [33] o en la tres-esfera [34], se llegaron a conclusiones análogas. La cuestión que nos gustaría responder es si es posible extender la aplicación de estos criterios de unicidad a espaciotiempos con secciones espaciales de topología compacta arbitraria. Más aún, otra cuestión que resulta de especial interés a la hora de cuantizar campos en espaciotiempos no estacionarios se refiere a la elección inicial de variables canónicas para el campo, ya que, en general, diferentes elecciones dan lugar a cuantizaciones inequivalentes. Una práctica común en cosmología consiste en re-escalar el campo con funciones del espaciotiempo de fondo, dependientes del tiempo, con la intención de alcanzar una descripción más conveniente. En principio, los resultados de unicidad mencionados son válidos para un campo que satisface una ecuación de ondas en un espaciotiempo estático con un potencial cuadrático variable en el tiempo. La pregunta que uno se puede hacer es si, al considerar una cuantización en términos de otras variables de campo relacionadas con las iniciales por medio de una transformación canónica dependiente del tiempo, existe una representación de Fock para ellas que satisfaga también los criterios de invariancia bajo simetrías espaciales y unitariedad de la dinámica, y si la consiguiente teoría cuántica es equivalente o no a la inicial. En la Ref. [35] se probó, para el caso de Gowdy en el tres-toro, que una transformación canónica dependiente del tiempo en la que se re-escala el campo por una función dada, su momento por el inverso de esta función y se añade al mismo una contribución lineal en el campo, con un factor de proporcionalidad que es asimismo otra función dependiente del tiempo, resulta ser incompatible con una dinámica unitaria a menos que el re-escalado del campo sea constante. Pero, en el caso de sistemas más generales, por ejemplo al considerar una ecuación de ondas con

un potencial cuadrático dependiente del tiempo pero por lo demás arbitrario, o para secciones espaciales con una topología compacta arbitraria, es necesario comprobar si descripciones de campo alternativas, correspondientes a otra elección de par canónico, son o no admisibles.

Si somos capaces de contestar a las preguntas que hemos formulado en los párrafos anteriores, podemos enfrentarnos al estudio de un modelo cosmológico realista. Para empezar, nuestro universo es esencialmente homogéneo a gran escala, presentando pequeñas inhomogeneidades que, como hemos anticipado, se pueden describir en términos de campos propagándose en ese espaciotiempo homogéneo de fondo. Uno de los formalismos que provee una descripción satisfactoria es el de teoría de perturbaciones cosmológicas [36,37]. El primero en considerar perturbaciones alrededor de una métrica de tipo FLRW fue Lifschitz [38]. Pronto se vio que, en este tipo de escenarios, ciertas transformaciones de coordenadas (transformaciones de gauge) dificultan una interpretación precisa de las perturbaciones que allí aparecen, al modificarlas y afectar su identificación. En las últimas décadas han surgido diferentes propuestas para abordar el estudio de esta clase de situaciones, desde los primeros intentos de formalismo covariante independiente de las transformaciones de gauge introducidos por Hawking [39] al formalismo de Bardeen [40] en términos de potenciales invariantes de gauge. Pero la teoría de perturbaciones sola no es capaz de explicar satisfactoriamente el origen de las estructuras que observamos en el cosmos. Es aquí donde entran en juego los modelos inflacionarios, junto con el paradigma de la gran explosión, como la opción más plausible para explicar la evolución del universo desde esos instantes iniciales a su estado actual [41]. Este tipo de modelos establecen que el universo, en algún momento de su evolución, sufre un periodo de rápida expansión, como el que produce, por ejemplo, un hipotético campo escalar con masa. Es más, es posible probar que las fluctuaciones cuánticas de este campo son suficientes para engendrar las inhomogeneidades que observamos actualmente [42]. Ignorando por el momento posibles efectos cuánticos provenientes de la geometría, las perturbaciones que se propagan en un espaciotiempo de fondo no estacionario deberían de admitir, en un régimen apropiado, una descripción semiclásica. Una cuestión interesante es si la cuantización de estas perturbaciones se ajusta a los criterios de unicidad mencionados en el párrafo anterior, ya que, en caso afirmativo, esto nos permitiría adoptar una descripción cuántica privilegiada y consistente (con las simetrías y la dinámica). Asimismo, sería conveniente ver qué papel desempeñan en esa cuantización los potenciales invariantes de Bardeen, y cómo se los podría incluir convenientemente en el modelo semiclásico, para asegurar la independencia de gauge y robustez de las posibles predicciones físicas que se pudieran deducir de la cuantización. Además, nos gustaría estudiar la interacción de las perturbaciones cuánticas con una geometría de fondo también cuántica. En este sentido, la cosmología

cuántica de lazos es un candidato sólido para introducir los efectos cuánticos en la geometría, y en particular permite reemplazar la singularidad clásica inicial por un rebote cuántico. Para los grados de libertad homogéneos que describen un espaciotiempo de FLRW acoplado a un campo escalar masivo existen estudios en relación a una hipotética, pero bien motivada, dinámica efectiva [43], que entre otras cosas permite afirmar que la mayoría de las trayectorias clásicas siempre producen la inflación necesaria, a diferencia de lo que ocurre en relatividad general. Pero se trata de una descripción semiclásica, y que no está sustentada por una descripción cuántica genuina dentro de la cosmología cuántica de lazos. También se ha estudiado la evolución de perturbaciones cosmológicas en un escenario efectivo como el mencionado anteriormente, pero en esos casos sólo se ha contemplado la interacción de los campos con el espaciotiempo de fondo a primer orden en las (hipotéticas) correcciones cuánticas, y un estudio sin tales limitaciones parece necesario.

Estructura de la tesis y objetivos

Esta tesis está estructurada en tres partes y tiene un total de siete capítulos. Además, hemos añadido cinco apéndices en los que se detallan cuestiones técnicas, empleadas en el análisis que vamos a presentar. En los tres primeros capítulos se tratan ciertos aspectos relacionados con la cosmología cuántica de lazos por medio de un estudio analítico, así como de un análisis numérico complementario, realizado para determinar algunos de los detalles más refinados. En los dos capítulos siguientes revisamos y ampliamos una propuesta de criterios de unicidad para la cuantización de campos que se propagan en espaciotiempos no estacionarios. Y en los dos últimos capítulos aplicamos todos esos resultados previos a un modelo cosmológico inflacionario con pequeñas inhomogeneidades, con el objetivo de proporcionar una descripción cuántica del mismo consistente y lo más elaborada posible.

- Parte 1: Cosmología cuántica de lazos.
 - En el Capítulo 1 estudiamos un universo homogéneo e isótropo plano de tipo FLRW acoplado a un campo escalar sin masa. Realizamos una descripción clásica y su posterior cuantización de tipo polimérica, siguiendo las pautas establecidas en la cosmología cuántica de lazos. Explicamos las propiedades generales que comparten todas las prescripciones de cuantización de lazos, como el espacio de Hilbert cinemático sobre el que definimos nuestros operadores, la construcción de la ligadura hamiltoniana y sus características, que incluyen los sectores de superselección o el espacio de Hilbert físico.

Finalmente, damos una descripción de la nueva perspectiva física que proporcionan, como por ejemplo la resolución de la singularidad clásica, que es reemplazada por un rebote cuántico.

- En el Capítulo 2 proporcionamos una nueva prescripción para la cuantización de este tipo de escenarios. Presentamos una ligadura hamiltoniana en la que se tiene en cuenta la orientación de la tríada a la hora de representarla por un operador cuántico. Las ventajas de esta prescripción son considerables: permite eliminar la singularidad clásica sin necesidad de apelar realmente a la dinámica; incluye un método natural y riguroso para llevar a cabo una densitización satisfactoria de la ligadura hamiltoniana; y simplifica considerablemente los sectores de superselección, que codifican la discretización de la geometría, y consecuentemente el espacio de Hilbert físico. Además, estas propiedades permiten establecer el concepto de rebote cuántico como una propiedad genérica del modelo, independiente de la discretización particular de la geometría y del estado concreto del universo.
 - Las diferentes prescripciones que se han venido proponiendo para cuantizar este modelo cosmológico se comparan en el Capítulo 3, con el ánimo de establecer cuantitativamente las ventajas e inconvenientes que presentan cada una de ellas. En concreto, consideramos cuatro prescripciones: la inicialmente propuesta por Ashtekar, Pawłowski y Singh [23]; una versión explícitamente resoluble sugerida por Ashtekar, Corichi y Singh [26]; una nueva prescripción introducida por nosotros [44], y que vamos a explicar en el Capítulo 2; y una versión que comparte todas las ventajas de esta última junto con las de la segunda propuesta. En particular, analizaremos la eficiencia numérica que presenta cada una de estas prescripciones, junto con las diferencias físicas que emergen tanto en el espacio de Hilbert físico como en los valores esperados de ciertos observables.
- Parte 2: Resultados de unicidad.
- En el Capítulo 4, por un lado, vamos a revisar los criterios de unicidad propuestos recientemente para la cuantización de un campo escalar que se propaga en un espaciotiempo estático de secciones espaciales isomorfas a una tres-esfera y sujeto a un potencial cuadrático dependiente del tiempo. Estos criterios consisten en el requerimiento de invariancia del estado de vacío de la teoría cuántica respecto a las isometrías de las secciones espaciales, junto con una implementación unitaria de la dinámica. Vamos a demostrar que estas dos condiciones son suficientes para seleccionar únicamente una representación de Fock, salvo equivalencia unitaria. Por otro lado, si permitimos

una descripción alternativa de las variables de campo, obtenida a partir de una transformación canónica dependiente del tiempo en la que se escale dicho campo, vamos a probar que, esencialmente, no hay una representación invariante que soporte una implementación unitaria de la dinámica para esas nuevas variables. Por tanto, los criterios de unicidad fijan no solamente la representación cuántica de las relaciones canónicas de conmutación, sino también la elección de variables canónicas para describir el modelo cuando se permiten re-escalados por funciones variables en el tiempo.

- Con el ánimo de generalizar los resultados anteriores, en el Capítulo 5 vamos a extenderlos a campos con soporte en espacios de topología compacta arbitraria (como mucho de dimensión $d = 3$). Primero aplicamos los criterios de invariancia bajo las isometrías de las secciones espaciales y unitariedad de la dinámica para seleccionar una única representación de Fock para un campo escalar en un espaciotiempo estático con secciones espaciales compactas arbitrarias, sujeto a un potencial cuadrático dependiente del tiempo. Después, estudiaremos si es posible encontrar una cuantización así en términos de un campo re-escalado, obtenido mediante una transformación canónica dependiente del tiempo. Vamos a ver que esta transformación debe ser trivial (esencialmente la identidad), salvo en topologías de dimensión $d = 1$, donde son posibles ciertas redefiniciones del momento del campo, en las que aparecen funciones dependientes del tiempo. Pero tales redefiniciones no introducen ambigüedades en realidad, sino que conducen a una teoría cuántica equivalente, y por tanto nuestros criterios de unicidad siguen siendo válidos para seleccionar la cuantización.

■ Parte 3: Inflación.

- El Capítulo 6 contiene un estudio detallado de un universo inflacionario con pequeñas inhomogeneidades. Se trata de un campo escalar acoplado a gravedad donde una imposición preliminar de homogeneidad e isotropía proporciona un modelo cosmológico inflacionario. Después incluimos pequeñas inhomogeneidades de naturaleza escalar alrededor de estas soluciones isótropas por medio de perturbaciones cosmológicas. Debido a la presencia de grados libertad no dinámicos, procedemos a la fijación de gauge. En concreto, estudiamos dos fijaciones diferentes. En ambas, el sistema reducido está descrito por la perturbación material. En los dos casos, aplicamos una transformación canónica que esencialmente consiste en un re-escalado de Mukhanov. Para alcanzar una descripción cuántica de esas perturbaciones, aplicamos con éxito los criterios de unicidad del Capítulo 4 (invariancia bajo

las simetrías espaciales y unitariedad de la dinámica), lo que nos permite escoger una cuantización de Fock de forma única (salvo equivalencia unitaria) para la perturbación material. Además, discutimos otras cuantizaciones de Fock alternativas, unitariamente equivalentes a la original. Una de ellas resulta que se construye a partir de un par canónico que está descrito en términos de potenciales invariantes de gauge (o potenciales de Bardeen).

- Por último, en el Capítulo 7 proporcionamos una cuantización completa de un universo con inhomogeneidades basándonos en todos los resultados anteriores, completándose así los objetivos principales de esta tesis. Empezamos aplicando una cuantización polimérica a un espaciotiempo de FLRW cerrado y acoplado a un campo escalar sin masa. Para la geometría, elegimos la prescripción presentada en el Capítulo 2, adaptada a una topología con curvatura positiva. Caracterizamos las soluciones a la ligadura hamiltoniana y las dotamos de estructura de espacio de Hilbert. Siguiendo el procedimiento del Capítulo 6, introducimos inhomogeneidades de naturaleza puramente escalar, fijamos el gauge y aplicamos una transformación canónica, para así adoptar la cuantización de Fock allí propuesta para las perturbaciones, que combinamos con la cuantización polimérica de los grados de libertad homogéneos. Las soluciones a la única ligadura global que queda por imponer (la hamiltoniana) son caracterizadas completamente, y equipadas con un producto interno unívocamente determinado, lo que permite construir el espacio de Hilbert físico del sistema.

Cosmología cuántica de lazos homogénea e isotrópica

Capítulo 1

Revisión de la cosmología cuántica de lazos homogénea e isótropa

La cosmología cuántica de lazos [12–17] ha proporcionado una cuantización satisfactoria de un gran número de sistemas cosmológicos, destacando en todos ellos la aparición de un rebote cuántico que reemplaza la singularidad clásica inicial. El primer sistema que se describió satisfactoriamente con este formalismo fue un escenario homogéneo e isótropo con secciones planas acoplado a un campo escalar sin masa [25]. Otros tipos de cosmologías de FLRW con curvatura positiva [45, 46] o negativa [47, 48] también han sido descritos en este contexto. Asimismo, existen estudios de modelos isótropos con constante cosmológica [49–51]. Aunque no va a ser objeto de estudio en esta tesis, también cabe mencionar la cuantización de escenarios anisótropos como las cosmologías de Bianchi [52] con diferentes curvaturas espaciales [53–57].

En este capítulo, a modo de introducción, vamos a revisar todas las propiedades que comparten las prescripciones que se han propuesto para la cuantización de un universo de tipo FLRW plano acoplado a un campo escalar sin masa [25, 26, 44, 58]. Estudiaremos la evolución del modelo cuántico en términos de una función de tiempo adecuada, y cómo los efectos de la cuantización, entre otras cosas, acaban por detener el colapso de un universo como el nuestro hacia la singularidad clásica al remontarnos al pasado, haciendo que éste rebote y evolucione hacia un universo en expansión.

1.1. Descripción clásica

Para proceder a la cuantización de lazos, vamos a considerar espaciotiempos M globalmente hiperbólicos, que admiten una descomposición $3+1$ o, equivalentemente, admiten una función global de tiempo t que permite foliar el espaciotiempo en una

serie de secciones espaciales Σ [59–61]. El vector de flujo temporal $t^\mu = Nn^\mu + N^\mu$ es el vector más general que satisface $\partial_t t = t^\mu \nabla_\mu t = 1$,¹ siendo n^μ el vector normal a la hipersuperficie Σ , N la función lapso, N^μ el vector (espacial) de desplazamiento y ∇ la conexión (o derivada covariante) asociada a la métrica espaciotemporal $g_{\mu\nu}$. Es posible ver que el elemento de línea asociado a esta métrica admite la siguiente descomposición:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + (dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt)h_{ab}. \quad (1.1.1)$$

El tensor h_{ab} representa la métrica espacial inducida en Σ .² Una cantidad geométrica adicional, definida en las secciones espaciales y que codifica la información de la geometría del espaciotiempo, es la curvatura extrínseca $K_{ab} = \mathcal{L}_n h_{ab}$, donde \mathcal{L}_n corresponde a la derivada de Lie en la dirección del vector normal n^μ . Explícitamente,

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} \left(-\mathcal{L}_t h_{ab} + \mathcal{D}_a N_b + \mathcal{D}_b N_a \right), \quad (1.1.2)$$

donde \mathcal{D} es la derivada covariante correspondiente a la métrica inducida en las secciones espaciales. Este paso previo de descomposición 3+1 nos va a permitir, entre otras cosas, alcanzar una formulación canónica de la relatividad general.

Partiendo de la acción de Hilbert-Einstein (completada con términos de superficie adecuados al problema variacional que se considere), se puede construir un momento Π^{ab} canónicamente conjugado a la métrica espacial, y que está íntimamente relacionado con la derivada en la dirección del flujo temporal de h_{ab} contenida en K_{ab} . La acción es cuadrática en el momento, tiene una dependencia funcional altamente no trivial respecto a la métrica espacial, y además presenta cuatro ligaduras de primera clase. Una es la ligadura escalar o hamiltoniana (que llamaremos C), cuyo multiplicador de Lagrange es la función lapso N , y las otras tres son ligaduras de momentos o difeomorfismos (designadas por C_a) con el vector de desplazamiento N^a como multiplicador de Lagrange. Las ligaduras de momentos generan traslaciones en las secciones espaciales, mientras que la ligadura escalar además revierte en reparametrizaciones temporales.

Desafortunadamente, esta formulación de la relatividad general no es el escenario más propicio para una cuantización canónica de la gravedad [62, 63], debido en parte a la gran complejidad que adquiere el modelo descrito en términos de los operadores fundamentales ($\hat{h}_{ab}, \hat{\Pi}^{cd}$). Más aún, una cuantización estándar aplicada a modelos reducidos por simetría (sistemas cosmológicos) –conocida como geometrodinámica cuántica o cuantización de Wheeler-DeWitt (WDW) [63]– no permite curar de manera satisfactoria la singularidad inicial, popularmente conocida como singularidad del *big bang*.

¹De ahora en adelante seguiremos el criterio de sumación de Einstein para índices repetidos.

²Las letras griegas μ, ν , etc. etiquetan índices espaciotemporales, mientras que las letras latinas a, b, \dots , etiquetan índices definidos en las secciones espaciales.

Por ello, una manera de abordar una posible descripción cuántica de la gravedad pasa primero por tratar de formularla de una forma más sencilla, lo que se consiguió en gran parte gracias a las variables introducidas por Ashtekar [64]. Además, esta reformulación abría las puertas a una cuantización de la gravedad a partir de técnicas no perturbativas [65], como las que se utilizan habitualmente en cromodinámica cuántica. Aunque no se ha podido proporcionar una cuantización no perturbativa satisfactoria para este último tipo de interacciones, debido en gran parte a dependencias de estructuras de fondo de la teoría, esta nueva formulación de la gravedad sí es independiente de las mismas, dado que es la propia estructura de fondo la que propaga la interacción. Al consiguiente programa de cuantización se le denomina comúnmente gravedad cuántica de lazos [1–4]. Nosotros vamos a concentrarnos en la aplicación de estas técnicas de cuantización a modelos cosmológicos [12–17]. Por ello, sólo daremos los detalles clave sobre la cuantización de lazos de la gravedad que vayamos a necesitar, empezando por formular la relatividad general en términos de conexiones gauge y sus variables canónicamente conjugadas (tríadas densitizadas) [64].

1.1.1. Variables de Ashtekar-Barbero

Describamos pues nuestro sistema en términos de las (así denominadas) variables de Ashtekar-Barbero [66]. Se trata de una conexión $su(2)$ y una tríada densitizada, que de ahora en adelante designaremos por A_a^i y E_i^a , respectivamente. Estas variables se pueden relacionar con la métrica h_{ab} y la curvatura extrínseca K_{ab} de la siguiente manera. Introduzcamos en primer lugar una co-tríada e_a^i , donde los índices internos i, j, \dots , son índices en $SU(2)$. La relación entre la métrica espacial y la co-tríada está dada por

$$h_{ab} = \delta_{ij} e_a^i e_b^j, \quad (1.1.3)$$

donde δ_{ij} es la métrica euclídea, que es la unidad si $i = j$ y cero en caso contrario. Es obvio que, al pasar de métricas a co-tríadas, hemos introducido grados de libertad adicionales. Veremos enseguida que estos grados de libertad van acompañados de ciertas ligaduras de primera clase, de manera que el cómputo total de grados de libertad queda inalterado. La tríada densitizada de peso unidad se define como

$$E_i^a = \sqrt{h} e_i^a, \quad (1.1.4)$$

donde h representa el determinante de la métrica espacial, que a su vez se puede expresar directamente en términos del determinante de la co-tríada. A partir de E_i^a podemos construir una conexión compatible con ella a través de la condición

$$\mathcal{D}_a E_i^b + \epsilon_{ijk} \Gamma_a^j E^{bk} = 0, \quad (1.1.5)$$

que conduce a

$$\Gamma_a^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}E_{jb}(\partial_a E_k^b + {}^h\Gamma_{ca}^b E_k^c). \quad (1.1.6)$$

Aquí, E_b^j es la inversa de la triada densitizada, ${}^h\Gamma_{ca}^b$ son los símbolos de Christoffel asociados a la derivada covariante \mathcal{D} inducida en las secciones espaciales Σ [61], y ϵ_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico.

Haciendo uso de la curvatura extrínseca en forma triádica $K_a^i = K_{ab}e^{bj}$, podemos finalmente construir una conexión [66] canónicamente conjugada a la triada densitizada

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i, \quad (1.1.7)$$

siendo $\gamma \in \mathbb{R}^+$ el llamado *parámetro de Immirzi*.³

Este par canónico define un espacio de fases Γ_{grav} dotado con una estructura simpléctica

$$\Omega(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{8\pi G\gamma} \int_{\Sigma} d^3x (\delta_1 A_a^i \delta_2 E_i^a - \delta_1 E_i^a \delta_2 A_a^i), \quad (1.1.8)$$

donde el símbolo δ representa un vector tangente a Γ_{grav} .

Dado que nuestro espacio de fases es mayor que el espacio de fases original en términos de las variables (h_{ab}, Π^{cd}) , deben aparecer nuevas ligaduras que permitan eliminar los grados de libertad adicionales, y que sean compatibles con las ligaduras escalar y de momentos originarias de la formulación métrica. En efecto, es fácil (aunque tedioso) probar que si la condición

$$G_i = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} \Gamma_a^j E^{ak} = 0 \quad (1.1.9)$$

se satisface, ambas formulaciones son equivalentes [1]. Dada la analogía existente entre (1.1.9) y la ecuación de Gauss para el campo eléctrico en vacío, a la ligadura G_i se la conoce comúnmente como *ligadura de Gauss*. Esta ligadura, junto con las ligaduras usuales de la formulación 3+1 de la relatividad general (reformuladas en términos de A_a^i y E_i^a),

$$C_a = F_{ab}^i E_i^b, \quad (1.1.10)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{|E|}} \epsilon_{ijk} [F_{ab}^i - (1 + \gamma^2) \epsilon_{mn}^i K_a^m K_b^n] E^{aj} E^{bk}, \quad (1.1.11)$$

forman un conjunto de ligaduras de primera clase. El símbolo $|E|$ representa el valor absoluto del determinante de la triada densitizada y F_{ab}^i el tensor de curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{ijk} A_a^j A_b^k. \quad (1.1.12)$$

³Aunque los trabajos pioneros [67, 68] indicaban que $\gamma = \pm i$ era la elección más razonable, se descartó esa elección debido a las dificultades técnicas que entrañaba en la teoría cuántica.

1.1.2. Sector homogéneo e isótropo

Puesto que la finalidad de este capítulo es presentar una revisión del modelo de FLRW plano dentro del marco de la cosmología cuántica de lazos [12–17], vamos a congelar aquellos grados de libertad de la teoría clásica que representan las inhomogeneidades, restringiéndonos únicamente al sector homogéneo e isótropo del espacio de fases $\Gamma_{\text{grav}}^{\text{iso}}$. En este subespacio, la conexión y la tríada

$$A_a^i = \tilde{c} \, {}^0e_a^i, \quad E_i^a = \tilde{p} \sqrt{{}^0h} \, {}^0e_i^a, \quad (1.1.13)$$

respectivamente, quedan determinadas por dos funciones \tilde{c} y \tilde{p} homogéneas e isótropas en cada sección espacial Σ .⁴ Además, hemos introducido por conveniencia una co-tríada auxiliar ${}^0e_a^i$ (también llamada fiducial) que está bien adaptada al grupo de traslaciones T^3 en el espacio plano \mathbb{R}^3 (aspecto que es también aplicable a ${}^0e_i^a$ y ${}^0h_{ab}$).

Debemos notar que las secciones espaciales no son compactas y las integrales sobre las mismas divergen, como es el caso de (1.1.8), por ejemplo. Por otro lado, nuestra elección del espacio de fases introduce cierta ambigüedad proveniente del hecho de que un re-escalado por una constante ${}^0h_{ab} \rightarrow \varsigma^2 {}^0h_{ab}$ hace que $\tilde{c} \rightarrow \varsigma^{-1} \tilde{c}$ y $\tilde{p} \rightarrow \varsigma^{-2} \tilde{p}$, quedando en duda su interpretación física. Una forma de resolver estos dos problemas [22] es restringiendo todas las integrales a una celda fiducial \mathcal{V} de volumen fiducial V_0 , e introducir la siguiente redefinición⁵

$$A_a^i = c V_0^{-1/3} {}^0e_a^i, \quad E_i^a = p V_0^{-2/3} \sqrt{{}^0h} \, {}^0e_i^a. \quad (1.1.14)$$

Con esta elección, cantidades como la estructura simpléctica o, equivalentemente, los corchetes de Poisson

$$\{c, p\} = \frac{8\pi G\gamma}{3} \quad (1.1.15)$$

están unívocamente determinados, viéndose inalterados por este tipo de transformaciones. Las nuevas funciones c y p también son invariantes bajo esos re-escalados, por lo que se recupera su interpretación física, como es el caso de la potencia $V = |p|^{3/2}$, que representa el volumen físico de la celda \mathcal{V} .

En cuanto a las ligaduras, debido a la isotropía y a la elección que hemos hecho para las variables en (1.1.14), tanto C_a como la ligadura de Gauss son idénticamente nulas. La única ligadura que sobrevive es la ligadura escalar, que se reduce a

$$C_{\text{grav}} = -\gamma^{-2} \int_{\mathcal{V}} d^3x \frac{1}{\sqrt{|E|}} \epsilon_{ijk} F_{ab}^i E^{aj} E^{bk} = -\frac{6}{\gamma^2} c^2 \sqrt{|p|}. \quad (1.1.16)$$

⁴La variable \tilde{p} y el factor de escala a de un universo de FLRW se relacionan mediante $|\tilde{p}| = a^2$.

⁵Es fácil ver que $V_0 \rightarrow \varsigma^3 V_0$ bajo la transformación ${}^0h_{ab} \rightarrow \varsigma^2 {}^0h_{ab}$.

Un modelo de estas características en ausencia de materia sólo tiene soluciones triviales $p = cte$. Por ello, debemos incluir algún tipo de contenido material. La manera más simple de proceder es incluir un campo escalar sin masa, ϕ , mínimamente acoplado. Este campo material se puede utilizar como tiempo interno del sistema, como veremos más adelante. Si identificamos p_ϕ como el momento canónicamente conjugado a ϕ , su contribución a la ligadura escalar es

$$C_{\text{mat}} = 8\pi G \int_{\mathcal{V}} d^3x \frac{1}{\sqrt{|E|}} p_\phi^2 = 8\pi G \frac{p_\phi^2}{|p|^{3/2}}. \quad (1.1.17)$$

La dinámica clásica está regida por el hamiltoniano del sistema $\mathbb{H} = NC/(16\pi G)$, donde

$$C = -\frac{6}{\gamma^2} c^2 \sqrt{|p|} + 8\pi G \frac{p_\phi^2}{|p|^{3/2}}, \quad (1.1.18)$$

y N es la función lapso (homogénea). Debido a que ϕ no aparece en el hamiltoniano, p_ϕ es una constante del movimiento. La combinación de las ecuaciones de movimiento con la ligadura nos permite deducir entonces que las trayectorias clásicas vienen dadas por

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{3}{16\pi G}} \ln |p| + cte. \quad (1.1.19)$$

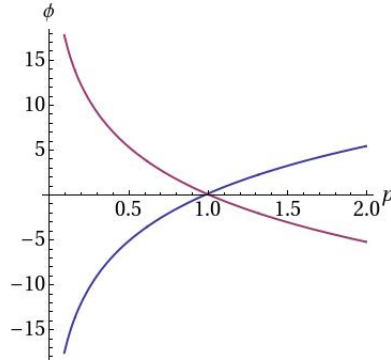


Figura 1.1: Figura ilustrativa con las soluciones correspondientes a un universo en expansión y otro en contracción, ambos con condiciones iniciales $p_0 = 1$ y $\phi(p_0) = 0$.

1.2. Modelo cuántico

El siguiente paso en nuestro análisis introductorio será establecer el marco cuántico que vamos a utilizar para describir un sistema cosmológico de estas características. En primer lugar, para el contenido material seguiremos un procedimiento de cuantización

estándar y que no necesitará una descripción exhaustiva, mientras que dedicaremos una mayor atención a la geometría, dado que vamos a emplear técnicas de cuantización (no estándar) *poliméricas*, similares a las empleadas en gravedad de lazos.

1.2.1. Representación cuántica del campo escalar

Clásicamente, y dentro del formalismo canónico, el contenido material está descrito, en el nivel cinemático, por las variables ϕ y p_ϕ . Aunque existen trabajos en los que un campo escalar es cuantizado poliméricamente [69], en esta tesis emplearemos una cuantización meramente estándar para los campos materiales, dejando la representación polimérica para los grados de libertad que describen la geometría.

Vamos a utilizar una representación de tipo Schrödinger donde los operadores $\hat{\phi}$ y $\hat{p}_\phi = -i\hbar\partial_\phi$ actúan por multiplicación y derivación, respectivamente. Un dominio de definición para estos operadores es el formado por el subespacio de funciones continuas de soporte compacto y que está contenido densamente en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, d\phi)$, formado por las funciones de cuadrado integrable con la medida de Lebesgue que comúnmente se asocia a la recta real. Usaremos la notación $|\phi\rangle$ para los autoestados generalizados de $\hat{\phi}$ que proporcionan una base ortonormal generalizada (normalizable a la delta de Dirac) en $L^2(\mathbb{R}, d\phi)$.

1.2.2. Geometría cuántica

Como ya hemos venido adelantando, vamos a adaptar las técnicas de cuantización de la gravedad de lazos para representar el sector homogéneo de la geometría. En la teoría completa, el álgebra que se pretende representar no se corresponde exactamente con el que proporcionan A_a^i y E_i^a , si no que las variables que se toman como fundamentales son las holonomías de la conexión a lo largo de aristas e ,

$$h_e(A) = \mathcal{P} \exp \left\{ \int_e dx^a A_a^i(x) \tau_i \right\}, \quad (1.2.1)$$

donde \mathcal{P} es el operador ordenación de camino y τ_i los elementos de $su(2)$ que satisfacen $[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ijk} \tau^k$, y los flujos de la tríada densitizada a través de superficies S

$$E(S, f) = \int_S f^i E_i^a \epsilon_{abc} dx^b dx^c, \quad (1.2.2)$$

donde f^i son funciones auxiliares que toman valores en $su(2)$ y que permiten suavizar los flujos a través de S [3].

Dado que las conexiones A_a^i son 1-formas y el dual de la tríada $\epsilon_{abc}E_i^c$ una 2-forma, su integración sobre caminos y superficies, respectivamente, es natural desde un punto de vista geométrico y su definición no requiere ningún tipo de estructura de fondo. Además, estos elementos geométricos son invariantes bajo difeomorfismos y tienen propiedades de transformación adecuadas. Otra característica relevante de la holonomía (1.2.1) es que codifica toda la información sobre el transporte paralelo de espinores a lo largo de la arista considerada.⁶

Vamos a restringirnos a partir de ahora al sector cosmológico. Para empezar, sustituimos en (1.2.1) la conexión dada en (1.1.14). Además, teniendo en cuenta que la topología espacial es plana, vamos a considerar aristas e orientadas en la dirección fiducial i y con una longitud fiducial correspondiente igual a $\mu V_0^{1/3}$, donde μ es un parámetro real, en principio arbitrario. Estas aristas son suficientes para diferenciar conexiones distintas. Es fácil ver entonces que la holonomía de la conexión c a lo largo de la arista e es [22]

$$h_i^\mu(c) = e^{\mu c \tau_i} = \cos\left(\frac{\mu c}{2}\right) \mathbb{I} + 2 \sin\left(\frac{\mu c}{2}\right) \tau_i, \quad (1.2.3)$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad.

Como nos va a interesar el álgebra de configuración formada por combinaciones lineales finitas de los elementos de matriz de las holonomías, los elementos fundamentales que debemos considerar son

$$\mathcal{N}_\mu(c) = e^{\frac{i}{2}\mu c}. \quad (1.2.4)$$

El álgebra de configuración puede tomarse entonces como el de las *funciones cuasi-periódicas* de c , que llamaremos de ahora en adelante $\text{Cyl}_\mathbb{S}$ [3, 22].⁷

Por otra parte, si introducimos la tríada densitizada que aparece en (1.1.14) y calculamos el flujo correspondiente a través de (1.2.2), obtenemos

$$E(S, f) = p V_0^{-2/3} A_{S,f}, \quad (1.2.5)$$

donde $A_{S,f}$ es un factor que depende del área fiducial de S y de las funciones de prueba f^i . De esta forma, vemos que los flujos están esencialmente caracterizados por

⁶En la cuantización de lazos, uno puede generalizar el espacio de conexiones al conocido como espacio de conexiones generalizadas, con conexiones que sólo están definidas a lo largo de aristas (y no en toda la variedad Σ). Cuando uno considera esta álgebra de configuración (extendida) junto con los flujos y exige invariancia bajo difeomorfismos, la única representación posible es tal que no alberga un operador cuántico bien definido para la conexión. Esta propiedad hace que la cuantización de lazos sea radicalmente distinta a una cuantización estándar.

⁷En cosmología cuántica de lazos se identifica el álgebra de funciones cuasi-periódicas con el espacio de las funciones cilíndricas (*cylindric functions* en inglés) definidas sobre las conexiones simétricas ($\text{Cyl}_\mathbb{S}$).

la variable p –recordemos que su potencia $|p|^{3/2}$ se identifica clásicamente como el volumen de \mathcal{V} –.

Así, concluimos que el espacio de fases en cosmología cuántica de lazos puede describirse por las variables $\mathcal{N}_\mu(c)$ y p , cuyo corchete de Poisson es

$$\{\mathcal{N}_\mu(c), p\} = i \frac{4\pi G\gamma}{3} \mu \mathcal{N}_\mu(c). \quad (1.2.6)$$

Éste será nuestro punto de partida: buscamos una representación del álgebra de configuración que a su vez proporcione una representación fiel de los flujos, y sobre la que exigiremos ciertas propiedades de simetría, siguiendo la misma estrategia que en la gravedad cuántica de lazos [6, 7, 70–74]. Para ello, empleamos que el álgebra de configuración es un álgebra de tipo C^* (obtenida al completar $\text{Cyl}_\mathbb{S}$ con la norma del supremo), y aplicamos los resultados de teoría de Gel’fand que nos permiten identificar estas álgebras como álgebras de funciones continuas sobre un cierto espacio compacto, llamado espectro de Gel’fand [1, 75]. En el caso considerado, el espectro resultante es un espacio conocido como la *compactificación de Bohr de la recta real*, que designaremos como $\bar{\mathbb{R}}$. Esta compactificación se puede entender como una extensión del espacio de configuración clásico –la recta real–, que queda densamente embebido en $\bar{\mathbb{R}}$ [22, 75]. El espacio $\bar{\mathbb{R}}$ forma un grupo conmutativo, que al ser compacto está equipado con una medida natural, invariante bajo la operación de grupo (medida de Haar). De ahora en adelante llamaremos $d\mu_B$ a esta medida. Más aún, la única representación del álgebra de configuración invariante bajo la simetría dada por este grupo de transformaciones es la que tiene como espacio de Hilbert $L^2(\bar{\mathbb{R}}, d\mu_B)$, esto es, el espacio formado por las funciones en $\bar{\mathbb{R}}$ cuya norma compleja al cuadrado es “sumable” con la medida $d\mu_B$. En este espacio de Hilbert podemos encontrar una base de autoestados de los operadores $\hat{\mathcal{N}}_\mu(c)$, que designaremos por los vectores o *kets* $|c\rangle$, tales que

$$\hat{\mathcal{N}}_\mu(c)|c'\rangle = e^{\frac{i}{2}\mu c'}|c'\rangle. \quad (1.2.7)$$

Por su parte, la actuación de \hat{p} se define por derivación sobre esta base de autoestados, de forma que se satisface la regla de cuantización de Dirac $[\hat{\mathcal{N}}_\mu(c), \hat{p}] = i\hbar\{\widehat{\mathcal{N}_\mu(c)}, p\}$, donde \hbar es la constante de Planck.

Por conveniencia, nos resultará más cómodo utilizar la base de autoestados $|\mu\rangle$ del espacio de momentos. Se trata de una base ortonormal

$$\langle\mu|\mu'\rangle = \delta_{\mu\mu'}, \quad \mu, \mu' \in \mathbb{R}, \quad (1.2.8)$$

cuyos elementos no se pueden numerar. Por tanto, queda claro que el espacio de Hilbert no es separable. La acción de \hat{p} puede definirse ahora por multiplicación

$$\hat{p}|\mu\rangle = \frac{4\pi G\hbar\gamma}{3}\mu|\mu\rangle, \quad (1.2.9)$$

de lo que se deduce que el espectro del operador \hat{p} es discreto –lo que indica que la geometría cuántica es intrínsecamente discreta–. Las exponenciales complejas de la conexión producen desplazamientos finitos

$$\hat{\mathcal{N}}_\mu(c)|\mu'\rangle = |\mu + \mu'\rangle. \quad (1.2.10)$$

Como esperábamos, es evidente que existen diferencias insalvables entre la representación construida y la que uno se encuentra en mecánica cuántica estándar, por lo que ambas no son equivalentes. Este hecho contrasta aparentemente con las implicaciones del teorema de Stone-von Neumann [76, 77], que parece asegurar la unicidad de la representación. La tensión queda resulta al percatarse de que, en el caso de la representación que estamos considerando, el requerimiento de continuidad fuerte no se satisface [78], contraviniendo así las hipótesis del teorema.

Finalmente (y para no complicar la notación en exceso), en el resto de la tesis usaremos la longitud de Planck $l_{\text{Pl}} = \sqrt{G\hbar}$, los operadores $\hat{\mathcal{N}}_\mu(c)$ serán designados simplemente por $\hat{\mathcal{N}}_\mu$, y definiremos $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}} = L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{B}})$ como el sector geométrico del espacio de Hilbert cinemático, puesto que es el escenario (de partida) auxiliar en el que introduciremos los operadores cuánticos geométricos de nuestro modelo cosmológico. Del mismo modo, llamaremos sector material del espacio de Hilbert cinemático a $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}} = L^2(\mathbb{R}, d\phi)$, y al producto tensorial de ambos $\mathcal{H}_{\text{kin}} = \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}}$ espacio de Hilbert cinemático.

1.2.3. Operador ligadura escalar y dinámica mejorada

Vamos a centrarnos primero en la contribución material (1.1.17) de la ligadura escalar. Clásicamente, este operador implica potencias inversas de la tríada, en particular $V^{-1} = |p|^{-3/2}$. Debido a que el espectro del operador \hat{p} es discreto, y que el estado $|\mu = 0\rangle$ es un autoestado de autovalor nulo, no podemos aplicar el teorema espectral para definir potencias negativas de \hat{p} en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$. Afortunadamente, en gravedad de lazos se recurre a una versión regularizada para este tipo de funciones, empleando una combinación adecuada de tríadas densitizadas y holonomías, procedimiento que es conocido como el *truco de Thiemann* [79, 80]—debido al nombre de su autor—. Basta con darse cuenta de la identidad clásica

$$\frac{\text{sgn}(p)}{|p|^{1-\zeta}} = \frac{1}{4\pi\gamma\zeta G} \frac{1}{\mu} \text{tr} \left(\sum_i \tau^i h_i^\mu(c) \left\{ [h_i^\mu(c)]^{-1}, |p|^\zeta \right\} \right), \quad (1.2.11)$$

donde tr designa la traza y ζ es cualquier número real entre 0 y 1, $0 < \zeta < 1$. Esta identidad puede promoverse a operador cuántico, reemplazando los corchetes de Poisson

por los conmutadores correspondientes. Como resultado obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\left[\frac{1}{\sqrt{|p|}} \right]} &= -\frac{i}{2\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta}} \widehat{\text{sgn}(p)} \widehat{\sqrt{|p|}} \text{tr} \left(\sum_i \tau^i \widehat{h_i^{\bar{\mu}}} [(\widehat{h_i^{\bar{\mu}}})^{-1}, \widehat{\sqrt{|p|}}] \right) \\ &= \frac{3}{4\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta}} \widehat{\text{sgn}(p)} \widehat{\sqrt{|p|}} \left(\widehat{\mathcal{N}_{-\bar{\mu}}} \widehat{\sqrt{|p|}} \widehat{\mathcal{N}_{\bar{\mu}}} - \widehat{\mathcal{N}_{\bar{\mu}}} \widehat{\sqrt{|p|}} \widehat{\mathcal{N}_{-\bar{\mu}}} \right). \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Aquí, hemos elegido $\zeta = 1/2$ por simplicidad. Este operador es diagonal en la base de estados $|\mu\rangle$, y su espectro converge rápidamente al de $\hat{p}^{-1/2}$ para estados con $\mu \gg 1$. Además, no sólo es regular sobre el estado $|\mu = 0\rangle$, sino que de hecho lo aniquila.

Teniendo en cuenta la representación cuántica introducida en la Sección 1.2.1, una forma natural de representar la parte material de la ligadura es a través del operador

$$\widehat{C}_{\text{mat}} = 8\pi G \widehat{\left[\frac{1}{V} \right]} \otimes \hat{p}_\phi^2, \quad (1.2.13)$$

donde

$$\widehat{\left[\frac{1}{V} \right]} = \widehat{\left[\frac{1}{\sqrt{|p|}} \right]}^3 \quad (1.2.14)$$

será, de ahora en adelante, el operador inverso del volumen. Por su parte, el símbolo \otimes nos indica que cada operador actúa en el espacio de Hilbert donde ha sido definido. Pero debido a que en la literatura se han usado otras prescripciones para representar C_{mat} como operador cuántico [25, 26, 44, 58], resultará más conveniente usar una notación genérica

$$\widehat{C}_{\text{mat}} = 8\pi G \widehat{B}(v) \otimes \hat{p}_\phi^2, \quad (1.2.15)$$

donde $\widehat{B}(v)$ proporcionará la contrapartida del operador inverso del volumen en algunas otras situaciones.

El siguiente paso es proporcionar un operador cuántico para la parte gravitacional de la ligadura. Debemos notar, en primer lugar, que esta contribución involucra conexiones a través del tensor de curvatura F_{ab}^i , las cuales no tienen un operador cuántico asociado bien definido [22]. Pero sabemos que las holonomías de las conexiones sí, por ello debemos primero encontrar la relación clásica existente entre éstas y el tensor de curvatura, y después seleccionar el operador cuántico que mejor se ajusta a la descripción física deseada [25].

Los trabajos pioneros [22–24], en analogía con la gravedad cuántica de lazos, establecen que el operador de curvatura se puede construir tomando un circuito cerrado

y cuadrado de holonomías, bien adaptado al modelo que se está estudiando. De esta forma, definimos

$$h_{\square_{ij}}^\mu = h_i^\mu h_j^\mu (h_i^\mu)^{-1} (h_j^\mu)^{-1}. \quad (1.2.16)$$

El circuito considerado encierra un área fiducial no nula $S_\square = \mu^2 V_0^{2/3}$. En el límite de área cero, tenemos que

$$F_{ab}^i \tau_i = \lim_{S_\square \rightarrow 0} \left(\frac{h_{\square_{ij}}^\mu - \delta_{ij}}{S_\square} \right) {}^o e_a^i {}^o e_b^j, \quad (1.2.17)$$

lo que nos permite recuperar el tensor de curvatura. Por otro lado, la contribución asociada a las tríadas densitizadas, o flujos, se puede reescribir clásicamente como [79, 80]

$$\frac{\epsilon_{ijk} \tau^i E^{aj} E^{bk}}{\sqrt{|E|}} = - \sum_k \frac{\text{sgn}(p)}{4\pi\gamma G V_0^{1/3}} \frac{1}{\mu_0} {}^0 e_c^k {}^0 \epsilon^{abc} h_k^{\mu_0} \{ (h_k^{\mu_0})^{-1}, V \}, \quad \forall \mu_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.2.18)$$

Esta identidad se satisface siempre, independientemente del valor que tome el parámetro fiducial μ_0 . En esta tesis vamos a asumir que esta ambigüedad en la selección de μ_0 no es relevante, mientras que su análogo en la expresión (1.2.17) sí desempeñará un papel fundamental, como veremos enseguida, así que simplemente identificaremos μ_0 con μ .

Sólo nos queda agrupar todas las contribuciones y tomar su traza, lo que conduce a

$$C_{\text{gr}} = - \frac{1}{2\pi\gamma^3 \mu^3 G} \sum_{ijk} \epsilon^{ijk} \text{tr} \left(h_i^\mu h_j^\mu (h_i^\mu)^{-1} (h_j^\mu)^{-1} h_k^\mu \{ (h_k^\mu)^{-1}, V \} \right). \quad (1.2.19)$$

Puede verse que, en el límite $\mu \rightarrow 0$, esta expresión coincide con (1.1.16). Como ya hemos venido anticipando, ese límite no está bien definido en la teoría cuántica, puesto que las conexiones no lo están.⁸ Así que μ deberá tomar un valor mínimo distinto de cero. La elección de ese valor es una cuestión no trivial, y es aún motivo de controversia en la comunidad científica. Motivados principalmente por los resultados obtenidos en [25], donde se observó que una elección adecuada para el parámetro μ era necesaria —ya que, de lo contrario, aparecen fenómenos cuánticos importantes en regiones típicamente clásicas [23, 24]—, nosotros seguiremos el esquema de *dinámica mejorada*, lo que implica tomar un parámetro μ dependiente del estado que se analice o, en otras palabras, que varíe con el estado. La elección que haremos consiste en imponer que el área *fiducial* S_\square (determinada por la longitud fiducial mínima $\bar{\mu} V_0^{1/3}$) corresponda a un área física $\bar{\mu}^2 p = \Delta$, donde Δ es un área constante del orden de l_{Pl}^2 y que

⁸En la teoría completa este problema puede sortearse tomando el límite en el espacio de Hilbert de estados invariantes bajo difeomorfismos, donde resulta estar bien definido [1]. Esto no es posible en nuestro modelo, puesto que la ligadura correspondiente ha sido ya fijada en el nivel clásico.

está fijada por el valor mínimo no nulo permitido para el área en el espectro de su operador geométrico, dentro de la gravedad cuántica de lazos [25, 55]. Esta forma de elegir el parámetro $\bar{\mu}$ proporciona un límite de bajas energías consistente, con buenas propiedades al re-escalar las estructuras fiduciales empleadas en la construcción, junto con un comportamiento adecuado en el régimen cuántico [81].

Como consecuencia de la dinámica mejorada, los operadores correspondientes a los elementos de matriz de las holonomías $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}$, al actuar sobre la base $|\mu\rangle$, ya no producen saltos constantes en su etiqueta, sino que los saltos dependen del estado sobre el que actúen. Por ello, conviene introducir un re-etiquetado de la base y un operador $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}$ bien adaptado a la nueva etiqueta. Empecemos por introducir un parámetro afín que satisface $\bar{\mu}(\mu)\partial_{\mu} = \partial_v$. Es sencillo ver que el parámetro buscado es $v(\mu) = (2\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta})^{-1} \text{sgn}(\mu) |\mu|^{3/2}$. Así, podemos reorganizar los estados $|\mu\rangle$ de forma unívoca, designándolos con el nuevo parámetro, y pasar a considerar que la base está formada por estados $|v\rangle$. El operador multiplicación que está bien adaptado a la etiqueta de esta base es justamente el operador volumen

$$\hat{V}|v\rangle = \text{sgn}(p)\hat{p}^{3/2}|v\rangle = 2\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta} v |v\rangle. \quad (1.2.20)$$

La variable canónicamente conjugada a v es $\beta = \hbar\bar{\mu}c/2$, cuyo corchete de Poisson es $\{\beta, v\} = 1$. Por tanto, para $\mathcal{N}_{\bar{\mu}} = e^{i\bar{\mu}c/2}$, podemos definir la acción del operador correspondiente $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} = e^{i\beta/\hbar}$ sobre los estados $|v\rangle$ como

$$\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}|v\rangle = |v+1\rangle. \quad (1.2.21)$$

Esta pareja de operadores son los elementos fundamentales con los que construiremos los operadores cuánticos que vamos a estudiar en esta tesis.⁹

Pasemos ahora a representar la parte gravitacional de la ligadura como un operador cuántico. Uno de los problemas que surge (además bien conocido en mecánica cuántica) es que este operador involucra productos de operadores que no conmutan, y por lo tanto, surge una ambigüedad en el orden de factores. A lo largo de la literatura, se han ido proporcionando diferentes operadores \hat{C}_{grav} que se pueden diferenciar precisamente en el orden de factores que se emplea a la hora de representarlos en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$ [25, 26, 44, 58]. Debido a esto, y a que en el Capítulo 3 vamos a hacer un análisis exhaustivo de las propuestas más relevantes que se han hecho sobre esta clase de operadores, a continuación vamos a tratar una situación genérica, dejando los detalles particulares de cada prescripción para más adelante.

⁹Aunque estos operadores podrían haber sido introducidos mucho antes en este capítulo, es preferible seguir una estructura que se asemeje al orden cronológico de los trabajos [22–25] que dieron lugar a esta elección de operadores fundamentales.

Consideremos la parte gravitacional de la ligadura (1.2.19). Hacemos la sustitución

$$\{\widehat{}\} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[\widehat{}, \widehat{}]. \quad (1.2.22)$$

Además, introducimos

$$\frac{\widehat{1}}{\widehat{\mu}} = \sqrt{\frac{|\widehat{p}|}{\Delta}} \quad (1.2.23)$$

y tenemos en cuenta que las holonomías están representadas por

$$(\widehat{h_i^{\mu}})^{\pm 1} = \cos\left(\frac{\widehat{\mu c}}{2}\right)\mathbb{I} \pm 2\sin\left(\frac{\widehat{\mu c}}{2}\right)\tau_i, \quad (1.2.24)$$

con

$$\cos\left(\frac{\widehat{\mu c}}{2}\right) = \frac{\widehat{\mathcal{N}}_{\widehat{\mu}} + \widehat{\mathcal{N}}_{-\widehat{\mu}}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\widehat{\mu c}}{2}\right) = \frac{\widehat{\mathcal{N}}_{\widehat{\mu}} - \widehat{\mathcal{N}}_{-\widehat{\mu}}}{2i}. \quad (1.2.25)$$

Simetrizando los productos de operadores que no conmutan, al final llegamos a un operador en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$ de la forma

$$\widehat{C} = \widehat{C}_{\text{gr}} \otimes \mathbf{I} + 8\pi G \widehat{B}(v) \otimes \widehat{p}_{\phi}^2. \quad (1.2.26)$$

Aquí, \mathbf{I} es el operador identidad.

Es preferible trabajar con una versión equivalente de este operador, que no sólo preserva toda la información física relevante, sino que tiene la ventaja de presentar explícitamente una forma separable (en la contribución material de la geométrica)

$$\widehat{C} = 8\pi G(-\hbar^2 \widehat{\Theta} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \widehat{p}_{\phi}^2). \quad (1.2.27)$$

Ambas ligaduras están relacionadas a través de un proceso comúnmente llamado *cambio de densitización*. Existen diferentes formas, más o menos naturales, de llevarlo a cabo [26, 27, 44, 54]. En el siguiente capítulo presentaremos un procedimiento bien definido y completamente riguroso para llevar a cabo esta transformación, así que dejaremos los detalles concretos de cada propuesta para más adelante.

Centrémonos ahora en el operador $\widehat{\Theta}$ que aparece en la ligadura densitizada \widehat{C} . Este operador tiene el espacio Cyl_S , denso en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$, por dominio invariante

$$\widehat{\Theta} = -\widehat{\mathcal{N}}_{2\widehat{\mu}} f(\widehat{v}) \widehat{\mathcal{N}}_{2\widehat{\mu}} - \widehat{\mathcal{N}}_{-2\widehat{\mu}} f(\widehat{v}) \widehat{\mathcal{N}}_{-2\widehat{\mu}} + f_o(\widehat{v}), \quad (1.2.28)$$

donde hemos definido $\widehat{v}|v\rangle = v|v\rangle$. Las funciones tienen una forma general

$$f(v) = \frac{3\pi G}{4}(v^2 - 2 - \alpha) + O(v^{-2}), \quad (1.2.29a)$$

$$f_o(v) = \frac{3\pi G}{2}(v^2 - \alpha) + O(v^{-2}). \quad (1.2.29b)$$

Aquí, α es una constante que depende de la simetrización particular adoptada en cada prescripción. La acción del operador $\hat{\Theta}$ sobre un estado $|v\rangle$ es

$$\hat{\Theta}|v\rangle = -f(v+2)|v+4\rangle - f(v-2)|v-4\rangle + f_o(v)|v\rangle, \quad (1.2.30)$$

lo que nos indica a primera vista que sólo relaciona estados con soporte en redes con un paso constante de cuatro unidades en el parámetro v . Los subespacios de estados con soporte en una de estas redes permanecen invariantes bajo la acción de $\hat{\Theta}$. Es más, si la función $f(v)$ se anula para determinados valores de v , es posible, como veremos más adelante, que los subespacios invariantes puedan reducirse aún más, pasando a estar formados por aquellos estados con soporte en semirredes de paso cuatro. En cualquier caso, para los operadores que vamos a considerar en esta tesis, identificaremos estos subespacios de $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$ como los formados a partir de las redes (o semirredes) \mathcal{L}_ε , donde $\varepsilon \in (0, 4]$ es un parámetro continuo que etiqueta cada sector y que proporciona el volumen mínimo permitido por la discretización de la geometría. Como el operador $\hat{\Theta}$ y cualquier otro de relevancia física que vaya a ser considerado dejan invariante estos subespacios, se pueden interpretar como sectores de superselección, ya que cualquiera de ellos contiene toda la información relevante sobre la geometría. De ahora en adelante los designaremos por \mathcal{H}_ε . Aunque el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$ no es separable, es posible descomponerlo como una suma directa de subespacios separables: $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}} = \bigoplus_\varepsilon \mathcal{H}_\varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, restringiremos el estudio a cualquiera de estos sectores de superselección.

Siguiendo los análisis de la Ref. [82], uno puede demostrar rigurosamente que la restricción de $\hat{\Theta}$ a cualquiera de esos sectores es un operador esencialmente autoadjunto, y que las partes absolutamente continua y esencial del espectro son positivas. Respecto a las partes del espectro discreto y singular, estudios numéricos evidencian que son vacías [25]. La degeneración de su espectro depende de a qué sector de superselección ε nos restrinjamos y de la prescripción que se está utilizando. A lo sumo, la degeneración es doble. La descomposición espectral de $\hat{\Theta}$ introduce una base de estados generalizados, que llamaremos $(e_k^\varepsilon|$, y que son soluciones a la ecuación

$$[\hat{\Theta}e_k^\varepsilon](v) = 12\pi Gk^2 e_k^\varepsilon(v), \quad k^2 \in \mathbb{R}^+, \quad (1.2.31)$$

donde $e_k^\varepsilon(v) = (e_k^\varepsilon|v\rangle$. Esta base de autoestados está normalizada a la delta de Dirac

$$(e_k^\varepsilon|e_{k'}^\varepsilon) = \delta(k' - k), \quad (1.2.32)$$

donde la delta está definida en un dominio \mathbf{R} que, dependiendo de la degeneración del espectro de $\hat{\Theta}$, puede ser \mathbb{R} ó \mathbb{R}^+ . Dado que en el Capítulo 3 vamos a describir detalladamente la manera en que se puede construir la base de autoestados generalizados $(e_k^\varepsilon|$, aquí sólo vamos a mencionar las propiedades más relevantes. En primer lugar,

los coeficientes $e_k^\varepsilon(v)$ pueden elegirse siempre de modo que $e_k^\varepsilon(-v) = e_k^\varepsilon(v)$.¹⁰ Además, siempre es posible encontrar una familia de autofunciones que, de forma exacta o en buena aproximación, se comporte en el límite $v \rightarrow \infty$ como

$$e_k^\varepsilon(v) \xrightarrow{|k| \gg 1} 2[e^{i\phi_k^\varepsilon} \underline{e}_k(v) + e^{-i\phi_k^\varepsilon} \underline{e}_{-k}(v)], \quad (1.2.33)$$

donde ϕ_k^ε es una fase compleja y los coeficientes $\underline{e}_{\pm k}(v)$ son las autofunciones generalizadas del operador en geometrodinámica o cuantización de WDW análogo a $\hat{\Theta}$ (véase el Apéndice A sobre los detalles de la cuantización de WDW). Estas funciones están amortiguadas exponencialmente en k para $v < k$.

1.2.4. Soluciones físicas: dinámica cuántica

Finalmente, partiendo del operador $\hat{\mathcal{C}}$ con dominio invariante denso contenido en cada sector $\mathcal{H}_\varepsilon \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}}$, y teniendo en cuenta que es un operador esencialmente autoadjunto en cada uno de estos sectores, uno puede construir el espacio de Hilbert físico, por ejemplo, utilizando las técnicas de *promedio sobre grupos* [83–87]. Alternativamente, puede llevarse a cabo una deparametrización del sistema seleccionando a ϕ como un tiempo o reloj interno [23, 24]. En tal caso, pueden tomarse familias de observables que evolucionen en función de este tiempo. Dada la forma de la ligadura, este procedimiento de deparametrización nos conduce a identificar dos sectores, que se corresponden con los sectores de frecuencias positivas y negativas (como en el caso de un campo de Klein-Gordon). Ambos contienen información física equivalente. Uno puede ver que las soluciones físicas son de la forma

$$\Psi^\pm(v, \phi) = \int_{k \in \mathbf{R}} dk \tilde{\Psi}(k) e_k^\varepsilon(v) e^{\pm i\omega(k)\phi}, \quad (1.2.34)$$

donde $\omega(k)^2 = 12\pi G k^2$ es el autovalor del operador $-\partial_\phi^2$ y $e_k^\varepsilon(v)$ son los coeficientes de las autofunciones del operador $\hat{\Theta}$. El espacio de Hilbert físico \mathcal{H}_{phy} se puede identificar entonces como el de funciones de onda $\tilde{\Psi} \in L^2(\mathbf{R}, dk)$.

Dado que esta deparametrización introduce la noción de evolución dinámica, podemos considerar las traslaciones temporales

$$\Psi_{\phi_o}^\pm(v) \mapsto \Psi_\phi^\pm(v) = U_\pm(\phi - \phi_o) \Psi_{\phi_o}(v), \quad U_\pm(\phi - \phi_o) = e^{\pm i\sqrt{|\hat{\Theta}|}(\phi - \phi_o)}, \quad (1.2.35)$$

donde $U_\pm(\phi - \phi_o)$ es un operador unitario, cuyo generador es el operador $\sqrt{|\hat{\Theta}|}$ que está definido a través de la descomposición espectral de $\hat{\Theta}$.

¹⁰La restricción al sector simétrico (invariante bajo la transformación $v \rightarrow -v$) contiene la misma información de la geometría que el antisimétrico.

Mediante este concepto de evolución, podemos introducir familias de operadores físicos relacionados por la dinámica, y contruidos a partir de aquéllos definidos en el espacio de Hilbert cinemático. De forma análoga a la teoría clásica, donde por ejemplo la función cinemática O tiene sentido físico bien definido una vez que ha sido evaluada sobre trayectorias clásicas, en la teoría cuántica podemos introducir el observable físico \hat{O}_ϕ a partir del cinemático \hat{O} a través de

$$[\hat{O}_\phi \Psi](v, \phi) = e^{i\sqrt{|\hat{\Theta}|}(\phi - \phi_o)} \left[\hat{O} \Psi(v, \phi) \right] \Big|_{\phi_o}. \quad (1.2.36)$$

En esta situación, los operadores $\ln |\hat{v}|_{\phi_o}$ y $\hat{p}_\phi = -i\hbar \partial_\phi$ forman un conjunto completo de observables de Dirac o físicos.

Es fácil ver que tanto los observables físicos como el producto interno físico preservan los subespacios de frecuencia positiva y negativa. Esto nos permite identificar una nueva superselección y, consecuentemente, restringir el estudio al sector de frecuencias positivas, por ejemplo.

1.2.5. Rebote cuántico o *big bounce*

El trabajo que por primera vez permitió una discusión profunda y sólida de las implicaciones físicas de la cosmología cuántica de lazos [25] concentró sus esfuerzos en el estudio de los estados de mayor interés físico: estados que están fuertemente picados a lo largo de trayectorias clásicas a tiempos tardíos. En concreto, los estados físicos estudiados consistían en perfiles gaussianos del tipo

$$\tilde{\Psi}_+(k) = e^{-\frac{(k-k^*)^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega(k)\phi^*}. \quad (1.2.37)$$

Se consideraron perfiles picados en $k = k^* \ll -1$, lo que permitía aproximar los estados físicos por

$$\Psi_+(v, \phi) = \int_{-\infty}^0 dk e^{-\frac{(k-k^*)^2}{2\sigma^2}} e_{-|k|}^{(s)}(v) e^{i\omega(k)(\phi - \phi^*)}, \quad (1.2.38)$$

despreciando así la contribución de $e_{|k|}^{(s)}(v)$. Por medio de un estudio numérico exhaustivo se pudieron computar las autofunciones $e_{-|k|}^{(s)}(v)$, para después evaluar esta integral. El resultado al que se llegó estudiando los valores esperados y dispersiones del operador $\widehat{|v|}_{\phi_o}$ es que ninguno de ellos se anula y que las ramas alcanzadas en los límites $\phi = \pm\infty$ están conectadas por un rebote de origen puramente cuántico que aparece cuando la densidad material alcanza un valor crítico que es aproximadamente 0.41 veces la densidad de Planck. El nombre que se dio a este fenómeno fue *rebote cuántico* o

gran rebote (*big bounce* en inglés). Además, se observó que las dispersiones de ciertos observables, como $\widehat{|v|}_{\phi_o}$ o la densidad de energía, presentan un mínimo en su dispersión justo cuando se alcanza el máximo en la densidad de energía, lo que sugiere que en ese instante la teoría puede comportarse de una forma marcadamente determinista, en contra de lo que uno inicialmente esperaría. En resumen, la cosmología cuántica de lazos proporciona la visión de que un universo en expansión proviene de otro en contracción de las mismas características, conectados por un rebote determinista y de origen puramente cuántico.

Capítulo 2

Una nueva perspectiva en cosmología cuántica de lazos homogénea e isótropa

En vista de la importancia alcanzada por los resultados de la cosmología cuántica de lazos aplicada a un sistema tan sencillo [23,24], mejorados con la implementación posterior de la dinámica de forma adecuada [25], era claramente necesario realizar un análisis más profundo del sistema para consolidar las predicciones. Por ejemplo, la necesidad de estudiar analíticamente este modelo [26], permitió entender que el paradigma del rebote cuántico resulta ser independiente del estado físico que se está considerando cuando se tiene en cuenta una discretización particular de la geometría, o lo que es lo mismo, cuando uno se restringe a un sector de superselección particular del espacio de Hilbert cinemático. A pesar de la relevancia de estos estudios, ha sido imprescindible ir todavía más lejos para poder llegar a entender ciertos aspectos que no quedaban totalmente claros. Entre ellos se encuentra, por ejemplo, un procedimiento natural y riguroso que permita realizar un cambio de densitización a nivel cuántico de la ligadura hamiltoniana, lo que en este modelo en particular resulta muy ventajoso. Además, otro aspecto importante para motivar un análisis más profundo es saber hasta qué punto los sectores de superselección que emergen en esta teoría, y que codifican la discretización intrínseca de la geometría, pueden ser simplificados al máximo preservando a la vez todas las propiedades físicas óptimas.

En este sentido, hemos sido capaces de aplicar las ideas aprendidas de la Ref. [54], donde se estudió un universo vacío, anisótropo y homogéneo de Bianchi I, al paradigmático espaciotiempo plano de FLRW acoplado a un campo escalar sin masa [44], cuya parte geométrica corresponde al sector isótropo de un modelo de Bianchi I. En

este capítulo, vamos a proponer una nueva prescripción para el operador $\hat{\Theta}$ que permite abordar con éxito las cuestiones anteriormente mencionadas respecto al cambio de densitización y a la simplificación de los sectores de superselección. Entre otras cosas, nos va a permitir generalizar el concepto de rebote cuántico, extendiendo los resultados obtenidos previamente en la Ref. [26] a cualquier sector de superselección. Además, veremos cómo esta nueva perspectiva puede arrojar luz en modelos cosmológicos más complejos.

2.1. Nueva prescripción

Nuestro punto de partida es el modelo de Bianchi I estudiado en la Ref. [54]. Este sistema cosmológico involucra tres factores de expansión, uno para cada dirección espacial. Su formulación en términos de variables de Ashtekar-Barbero involucra una ligadura escalar que se puede factorizar en productos cruzados de factores del tipo

$$\Lambda_i = \text{sgn}(p_i) \sqrt{p_i} c_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1.1)$$

A la hora de representar estas cantidades clásicas como operadores cuánticos, las funciones $\text{sgn}(p_i)$ deben ser tenidas en cuenta. Este punto resultó esencial para entender cómo optimizar los sectores de superselección, tanto por consistencia matemática como desde un punto de vista físico.

2.1.1. Ligadura escalar: resolución de la singularidad y cambio de densitización

Para desvelar la relevancia que podría desempeñar esa función signo en una situación de isotropía, vamos a transvasar al sector isótropo la ligadura del modelo de Bianchi I acoplado a un campo escalar sin masa. Tras escribir las funciones Λ_i en términos de holonomías dentro del esquema de la dinámica mejorada, podemos ver que sus análogos cuánticos, una vez identificadas las tres direcciones espaciales, se corresponden con el operador

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} |\widehat{V}|^{1/3} \left[\widehat{\left[\frac{1}{V} \right]}^{-1/6} \left[\left(\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} \right) \widehat{\text{sgn}(V)} + \widehat{\text{sgn}(V)} \left(\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} \right) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \widehat{\left[\frac{1}{V} \right]}^{-1/6} |\widehat{V}|^{1/3} \right], \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

donde hemos introducido el operador inverso del volumen, que ya se definió en (1.2.14). La razón de haberlo incluido en la definición del operador $\hat{\Omega}$ no es otra que preservar

el paralelismo con sus análogos $\hat{\Theta}_i$ definidos en la Ref. [54]. Pero esta elección no desempeña un papel fundamental en este análisis, y en principio podría tomarse la prescripción $|\widehat{V}|^{1/3} [\widehat{1/V}]^{-1/6} \simeq |\widehat{V}|^{1/2}$.¹

Para la ligadura hamiltoniana utilizamos la siguiente simetrización

$$\hat{C} = -\frac{6}{\gamma^2} \left[\widehat{\frac{1}{V}} \right]^{1/2} \hat{\Omega}^2 \left[\widehat{\frac{1}{V}} \right]^{1/2} \otimes \mathbf{I} + 8\pi G \left[\widehat{\frac{1}{V}} \right] \otimes \hat{p}_\phi^2. \quad (2.1.3)$$

Este operador cuántico presenta ciertas propiedades de relevancia. En primer lugar la acción de \hat{C} restringida a $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$ aniquila al estado de volumen nulo $|v=0\rangle$, debido a la manera en que aparecen las potencias del inverso del volumen. Además, la acción de este operador sobre cualquier otro estado del espacio de Hilbert gravitacional nunca involucra contribuciones del estado de volumen nulo. Por tanto, el subespacio que compone el complemento ortogonal de $|v=0\rangle$ permanece invariante bajo la acción de \hat{C} (en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$). De esta manera, podemos restringir el estudio a ese complemento ortogonal, que de ahora en adelante llamaremos $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$. Así, $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}} = \widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{gr}} \cup |v=0\rangle$. El espacio de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$ será el punto de partida para estudiar la parte geométrica de las soluciones no triviales a la ligadura. Es importante enfatizar que, siguiendo las líneas de los trabajos [54, 88–90], el estado cuántico correspondiente a la singularidad clásica queda eliminado de la teoría en este preciso instante.

Este paso es fundamental para poder introducir un cambio de densitización en la ligadura cuántica. Consideremos pues la familia de estados $|\psi\rangle$ que son aniquilados por la ligadura y que en general no son normalizables en el espacio de Hilbert cinemático. Un espacio natural donde estos estados se pueden definir es en el dual de un conjunto denso en $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}$, como es el subespacio $\widetilde{\text{Cyl}}_{\text{S}}^* \supset \text{Cyl}_{\text{S}}^*$ (tal que $\widetilde{\text{Cyl}}_{\text{S}} \cap |v=0\rangle = \emptyset$, y con $\widetilde{\text{Cyl}}_{\text{S}}^*$ igual al dual de $\widetilde{\text{Cyl}}_{\text{S}}$) multiplicado tensorialmente por un espacio adecuado para los grados de libertad del campo escalar. El operador $[\widehat{1/V}]$ definido en $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$ tiene espectro discreto y su kernel es el conjunto vacío, así que se puede definir su inverso sin problemas a través del teorema espectral. De hecho, utilizaremos este operador para definir una biyección –que actúa como la identidad sobre la contribución material– entre las soluciones $|\psi\rangle$ de la ligadura escalar \hat{C} y las soluciones $|\psi'\rangle = |\psi\rangle [\widehat{1/V}]^{1/2}$ de su contrapartida densitizada

$$\hat{C} = -\frac{6}{\gamma^2} \hat{\Omega}^2 \otimes \mathbf{I} + 8\pi G \mathbf{I} \otimes \hat{p}_\phi^2. \quad (2.1.4)$$

La ventaja que tiene esta versión densitizada de la ligadura es que presenta una separación explícita entre geometría y contenido material, y es más sencilla de imponer

¹Una situación análoga se encuentra al comparar las prescripciones de las Refs. [25] y [26], que se diferencian esencialmente en una simplificación de este estilo.

cuánticamente, ya que tanto $\hat{\Omega}^2$ como \hat{p}_ϕ^2 son dos observables de Dirac que conmutan. Comparando con la expresión (1.2.27) del capítulo anterior, podemos definir

$$\hat{\Theta}_{MMO} = \frac{3}{4\pi G \gamma^2 \hbar^2} \hat{\Omega}^2, \quad (2.1.5)$$

donde el subíndice se ha introducido convenientemente debido a las iniciales de los autores [44].

2.1.2. Propiedades del operador $\hat{\Omega}^2$

Ahora sólo nos queda realizar un análisis exhaustivo del operador $\hat{\Omega}^2$ antes de caracterizar las soluciones a la ligadura $\hat{\mathcal{C}}$. En cuanto a la contribución material, se trata de un operador bien conocido y merece menos atención. En esta sección vamos a determinar los sectores de superselección del modelo y haremos un análisis espectral del operador en cada uno de ellos. Además, estudiaremos sus autofunciones, cuyas propiedades únicas nos van a permitir alcanzar un entendimiento profundo respecto al rebote cuántico. En particular, veremos que estas autofunciones están unívocamente determinadas a partir de la sección de volumen mínimo, sin necesidad de imponer ninguna condición de frontera, y que se convierten en una combinación lineal de dos autofunciones de WDW con idéntica contribución en el límite $v \rightarrow \infty$.

Sectores de superselección

Los sectores de superselección se pueden deducir de forma directa analizando la acción del operador $\hat{\Omega}^2$ sobre los estados $|v\rangle$ de $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$. El resultado es

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^2 |v\rangle = & -f_+(v)f_+(v+2)|v+4\rangle + [f_+^2(v) + f_-^2(v)] |v\rangle \\ & - f_-(v)f_-(v-2)|v-4\rangle, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

donde

$$f_{\pm}(v) = \frac{\pi \gamma l_{\text{Pl}}^2}{3} g(v \pm 2) s_{\pm}(v) g(v), \quad (2.1.7)$$

$$s_{\pm}(v) = \text{sgn}(v \pm 2) + \text{sgn}(v), \quad (2.1.8)$$

$$g(v) = \begin{cases} \left| \left| 1 + \frac{1}{v} \right|^{\frac{1}{3}} - \left| 1 - \frac{1}{v} \right|^{\frac{1}{3}} \right|^{-\frac{1}{2}} & \text{si } v \neq 0, \\ 0 & \text{si } v = 0. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

De acuerdo con lo explicado en el Capítulo 1, se trata de un operador en diferencias que sólo relaciona estados con soporte en redes de paso cuatro en la etiqueta v . Además las

funciones $s_{\pm}(v)$ que aparecen en $f_{\pm}(v)$ hacen que $f_{-}(v)f_{-}(v-2)$ sea cero si $v \in (0, 4]$ y que $f_{+}(v)f_{+}(v+2)$ se anule cuando $v \in [-4, 0)$. Si trasladamos esto a la ecuación en diferencias (2.1.6), concluimos que la acción del operador $\widehat{\Omega}^2$ nunca va a relacionar estados con soporte en $v > 0$ con los que tienen soporte en $v < 0$. En este sentido, podemos afirmar que la parte gravitacional de la ligadura desacopla diferentes orientaciones de la tríada (o del volumen orientado). En efecto, el operador $\widehat{\Omega}^2$ sólo relaciona estados con soporte en semirredes $\mathcal{L}_{\varepsilon}^{\pm} = \{v = \pm(\varepsilon + 4n), n \in \mathbb{N}\}$, donde $\varepsilon \in (0, 4]$ es el parámetro que etiqueta cada sector y que ya fue introducido en el Capítulo 1. Debemos notar que, aunque el espacio de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ inicial no era separable, sí que se puede expresar como una suma directa de subespacios separables de la forma $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{grav}} = \bigoplus_{\varepsilon} (\mathcal{H}_{\varepsilon}^{+} \oplus \mathcal{H}_{\varepsilon}^{-})$. Cabe notar que cada subespacio $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{\pm}$ se puede obtener a través de la completación de Cauchy de $\text{Cyl}_{\varepsilon}^{\pm} = \text{span}\{|v\rangle, v \in \mathcal{L}_{\varepsilon}^{\pm}\}$ respecto al producto interno discreto introducido en 1.2.2, y que cada conjunto $\text{Cyl}_{\varepsilon}^{\pm}$ proporciona un dominio de definición para $\widehat{\Omega}^2$ en el correspondiente subespacio $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{\pm}$.

También debemos darnos cuenta de que los subespacios del tipo $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{\pm} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}}$ permanecen invariantes bajo la acción de $\hat{\mathcal{C}}$. Además, los operadores de relevancia física que vamos a considerar en este estudio mantienen esa propiedad. Por tanto, podemos interpretar que cada uno de esos subespacios es superseleccionado por nuestro modelo, y la restricción a cualquiera de ellos proporciona la misma información física. Sin pérdida de generalidad, de ahora en adelante limitaremos nuestro análisis al subespacio (separable) $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{+} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}}$.

Respecto a los estudios previos que se han hecho sobre este modelo en el contexto de la cosmología cuántica de lazos [22–27, 91], es importante enfatizar que una diferencia esencial entre los sectores de superselección que allí surgían y los que hemos descrito aquí (salvo pequeñas excepciones que serán detalladas en el Capítulo 3) es que en general sólo estos últimos desacoplan orientaciones opuestas del volumen.

2.1.3. Autoadjunción y análisis espectral

Aunque sabemos que, en el sector de superselección considerado, el operador $\widehat{\Omega}^2$ ha sido definido como un operador simétrico con dominio de definición $\text{Cyl}_{\varepsilon}^{+}$ (en la componente geométrica del espacio de Hilbert), aún no hemos demostrado si este operador admite una única extensión autoadjunta. Afortunadamente, en la Ref. [82] se probó que el operador $\hat{\Theta}$ de las Refs. [25, 26] era un operador esencialmente autoadjunto. A continuación, haciendo uso del teorema de Kato-Rellich [92], vamos a probar a partir de esos resultados de autoadjunción que la restricción de $\widehat{\Omega}^2$ a $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{+}$ sí es esencialmente autoadjunta.

En la Ref. [82] se demostró que la clase de equivalencia formada por los operadores $\hat{\Theta}$ parametrizados por α [véase la expresión (1.2.28)], y allí llamados H'_{APS} , restringidos a un sector de superselección del tipo $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \oplus \mathcal{H}_{4-\varepsilon}^-$ (si $\varepsilon \neq 4$), admiten una única extensión autoadjunta: el operador $\hat{\Theta}$ es esencialmente autoadjunto (para cada valor de la constante α). En nuestro caso, empecemos restringiendo $\hat{\Theta}_{MMO}$ [véase la Ec. (2.1.5)] a esos sectores del espacio de Hilbert cinemático. Podemos ver que la diferencia

$$\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_{MMO} = -\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} h(\hat{v}) \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} h(\hat{v}) \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} + h_o(\hat{v}), \quad (2.1.10)$$

donde

$$h(v) = \frac{3\pi G}{4} \left(\frac{5}{3} - \alpha \right) + O(v^{-2}), \quad (2.1.11)$$

$$h_o(v) = \frac{3\pi G}{2} \left(\frac{5}{3} - \alpha \right) + O(v^{-2}), \quad (2.1.12)$$

resulta ser un operador simétrico y de clase traza si elegimos $\alpha = 5/3$. Por otro lado, el teorema de Kato-Rellich nos asegura que, si a un operador esencialmente autoadjunto le añadimos un operador simétrico de clase traza, el operador resultante sigue siendo esencialmente autoadjunto. Así que, con esto, concluimos que $\hat{\Theta}_{MMO}$, y en consecuencia $\hat{\Omega}^2$, es esencialmente autoadjunto en cada espacio de Hilbert de la forma $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \oplus \mathcal{H}_{4-\varepsilon}^-$ con $\varepsilon \neq 4$.

Para el caso $\varepsilon = 4$ debemos considerar la restricción a $\mathcal{H}_4^+ \oplus \mathcal{H}_4^-$ junto con una definición de la acción sobre el estado $|v=0\rangle$, que será, por ejemplo, que el operador aniquila ese estado. Aplicando los mismos argumentos de antes, llegamos a idéntica conclusión sobre la autoadjunción de $\hat{\Omega}^2$, pero ahora restringido a este subespacio de Hilbert específico.

Ahora sólo nos queda probar que la restricción de $\hat{\Omega}^2$ a $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ es también esencialmente autoadjunta. Para ello haremos uso del hecho de que, si \hat{A} es un operador simétrico definido en cierto espacio de Hilbert \mathcal{H} , y ρ es cualquier número complejo, entonces el operador es esencialmente autoadjunto si y sólo si no existen soluciones normalizables en \mathcal{H} a la ecuación $\hat{A}^\dagger|\phi\rangle = \rho|\phi\rangle$ (también conocida como ecuación de índices de defecto) [93, 94]. Supongamos entonces que la restricción de $\hat{\Omega}^2$ a $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ resultara ser un operador que no es esencialmente autoadjunto. Esto significaría que existe una solución no trivial a su ecuación de índices de defecto, que pertenecerá a $\mathcal{H}_\varepsilon^+$. Esto es equivalente a decir que $\hat{\Omega}^2$ contiene una solución de esas características en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \oplus \mathcal{H}_{4-\varepsilon}^-$, cuya proyección en $\mathcal{H}_{4-\varepsilon}^-$ sería idénticamente nula. Pero la existencia de una solución así entra en contradicción con que $\hat{\Omega}^2$ es un operador esencialmente autoadjunto en $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \oplus \mathcal{H}_{4-\varepsilon}^-$. De forma análoga, estos resultados se aplican en el caso en que se parta de $\hat{\Omega}^2$ sobre $\mathcal{H}_4^+ \oplus \mathcal{H}_4^-$. En conclusión, $\hat{\Omega}^2$ resulta ser esencialmente autoadjunto en $\mathcal{H}_\varepsilon^+$, $\forall \varepsilon \in (0, 4]$.

Únicamente nos resta hacer el análisis espectral de $\widehat{\Omega}^2$ antes de estudiar sus autofunciones generalizadas. En primer lugar, en la Ref. [82] se demostró que las partes esencial y absolutamente continua del espectro de la familia de operadores $\hat{\Theta}$ (recorremos de nuevo que en la Ref. [82] se los llama H'_{APS}) son ambas iguales a $[0, \infty)$. Estos resultados, junto con los teoremas *Weyl-von Neumann* y *Kato-Birman* [92], nos permiten llegar a resultados análogos para $\widehat{\Omega}^2$ (o equivalentemente para $\hat{\Theta}_{MMO}$), definido en cada $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$. El primero de los teoremas nos asegura que si un operador autoadjunto le añadimos otro autoadjunto y compacto, la parte esencial de su espectro se preserva; el segundo nos permite afirmar que, si a un operador autoadjunto le añadimos un operador de clase traza, la parte absolutamente continua de su espectro es unitariamente equivalente a la del operador original. Ahora bien, si recordamos, la diferencia de los operadores $(\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_{MMO})$ es un operador simétrico de clase traza, tomando $\alpha = 5/3$. Teniendo en cuenta la simetría $f_\pm(-v) = -f_\mp(v)$ del operador $\widehat{\Omega}^2$ bajo la transformación $v \rightarrow -v$, y asumiendo la *independencia* del espectro en la etiqueta ε , concluimos que el operador $\widehat{\Omega}^2$ definido en $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ tiene también espectros absolutamente continuo y esencial iguales a $[0, \infty)$.

Además, en la Sección 2.2 veremos que las autofunciones generalizadas de $\widehat{\Omega}^2$ convergen a una combinación lineal las autofunciones de su operador análogo en la cuantización estándar geometrodinámica de WDW para valores grandes de v . Si añadimos la continuidad del espectro en geometrodinámica cuántica, esto es consistente con que los espectros discreto y singular sean vacíos.

En conclusión, el operador $\widehat{\Omega}^2$ definido en $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ es un operador definido positivo y esencialmente autoadjunto con espectro absolutamente continuo que coincide con \mathbb{R}^+ .

2.2. Autofunciones generalizadas

Para determinar las autofunciones de $\widehat{\Omega}^2$ en el sector de superselección $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ considerado, partimos de la expansión de estas autofunciones $(e_\lambda^\varepsilon|$, que vendrán dadas por estados generalizados, en la base de autoestados del volumen: $(e_\lambda^\varepsilon| = \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} e_\lambda^\varepsilon(v) \langle v|$, donde $e_\lambda^\varepsilon(v) = (e_\lambda^\varepsilon|v\rangle$ y $\lambda \in [0, \infty)$ según hemos visto. La ecuación de autovalores $[\widehat{\Omega}^2 e_\lambda^\varepsilon](v) = \lambda e_\lambda^\varepsilon(v)$ se traduce en

$$f_+(v-4)f_+(v-2)e_\lambda^\varepsilon(v-4) - [f_+^2(v) + f_-^2(v) - \lambda] e_\lambda^\varepsilon(v) + f_-(v+4)f_-(v+2)e_\lambda^\varepsilon(v+4) = 0. \quad (2.2.1)$$

Teniendo en cuenta que $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+$, la primera relación de consistencia que se satisface es

$$e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon+4) = \frac{[f_+^2(\varepsilon) + f_-^2(\varepsilon) - \lambda]}{f_-(\varepsilon+4)f_-(\varepsilon+2)} e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon), \quad (2.2.2)$$

Utilizando la ecuación de autovalores de manera recursiva, y reordenando las contribuciones adecuadamente, es posible llegar a la siguiente expresión para los coeficientes de las autofunciones

$$e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 4n) = e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon) \frac{\prod_{i=0}^{n-1} F_i(\lambda, \varepsilon)}{G_{1,2n}(\varepsilon)} \left(1 + \sum_{t=1}^M \sum_{\substack{i_1, \dots, i_t=0 \\ i_1 \leq \dots \leq i_t}}^{n-2t} \prod_{k=1}^t P_{i_k+2(k-1)}(\lambda, \varepsilon) \right), \quad (2.2.3)$$

donde $M = n/2$ si n es par y $M = (n-1)/2$ si n es impar, y además

$$G_{i,j}(\varepsilon) = \prod_{n=i}^j f_-(\varepsilon + 2n), \quad F_i(\lambda, \varepsilon) = f_+^2(\varepsilon + 4i) + f_-^2(\varepsilon + 4i) - \lambda, \quad (2.2.4)$$

$$P_i(\lambda, \varepsilon) = - \frac{[G_{2i+2,2i+3}(\varepsilon)]^2}{F_i(\lambda, \varepsilon) F_{i+1}(\lambda, \varepsilon)}. \quad (2.2.5)$$

En la relación anterior, las cantidades $P_i(\lambda, \varepsilon)$ pueden ocasionar problemas cuando su denominador se anula. Pero el productorio que aparece al principio de la expresión (2.2.3) cancela cualquier posible inconsistencia. Además, debe tenerse en cuenta que $f_+(v) = f_-(v+2)$.

Para esta base de autofunciones generalizadas, $(e_\lambda^\varepsilon|$ elegimos la condición de normalización

$$(e_\lambda^\varepsilon|e_{\lambda'}^\varepsilon) = \delta(\lambda - \lambda'), \quad (2.2.6)$$

donde, como consecuencia directa de la continuidad del espectro de $\widehat{\Omega}^2$, $\delta(x)$ es la delta de Dirac en \mathbb{R}^+ . Por tanto, podemos obtener una resolución espectral de la identidad en el espacio $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ mediante esta base:

$$\mathbf{I} = \int_{\mathbb{R}^+} d\lambda |e_\lambda^\varepsilon)(e_\lambda^\varepsilon|. \quad (2.2.7)$$

Es importante recalcar ciertos aspectos que podrían pasar desapercibidos. El primero es el hecho de que, antes de proceder a su normalización, podemos determinar cada autofunción completamente a partir de su dato inicial $e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon)$. Esto nos permite concluir, entre otras cosas, que el espectro de $\widehat{\Omega}^2$ no es degenerado: cada autovalor está asociado a una única autofunción. En segundo lugar, la condición (2.2.6) fija el dato inicial $e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon)$ salvo una fase global irrelevante que eliminaremos introduciendo la condición $e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon) > 0$. De este modo concluimos que los coeficientes $e_\lambda^\varepsilon(v)$ son todos reales (ya que las funciones $f_\pm(v)$ lo son). Estas propiedades de las autofunciones son la clave para probar los resultados en relación al rebote cuántico y su carácter genérico, y que explicaremos al final de este capítulo.

2.2.1. Límite asintótico o de WDW

El comportamiento asintótico de las autofunciones va a tener un papel fundamental para comprender el paradigma de rebote cuántico. Por esto, debemos prestar cierta atención a ese límite en el que la cuantización de lazos comparte muchas de las propiedades de una cuantización de tipo WDW. A parte del Apéndice A, vamos a utilizar los métodos aplicados en las Refs. [50,91].

La cuestión que tenemos intención de probar es que las autofunciones $e_\lambda^\varepsilon(v)$ convergen a una combinación lineal de autofunciones del operador $\hat{\Omega}^2$ de la teoría de WDW para v suficientemente grande. Para ello nos basaremos en el método propuesto en las Refs. [50,91] y que hace uso de matrices de transferencia. En primer lugar, vamos a introducir la siguiente notación

$$\vec{e}_\lambda^\varepsilon(v) = \begin{pmatrix} e_\lambda^\varepsilon(v) \\ e_\lambda^\varepsilon(v-4) \end{pmatrix}, \quad (2.2.8)$$

que nos permite escribir la ecuación de las autofunciones en forma matricial, mediante una matriz de transferencia $\mathbf{A}(v)$, es decir,

$$\vec{e}_\lambda^\varepsilon(v+4) = \mathbf{A}(v)\vec{e}_\lambda^\varepsilon(v) = \begin{pmatrix} \frac{f_+^2(v)+f_-^2(v)-\lambda}{f_-(v+4)f_-(v+2)} & -\frac{f_+(v-4)f_+(v-2)}{f_-(v+4)f_-(v+2)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\lambda^\varepsilon(v) \\ e_\lambda^\varepsilon(v-4) \end{pmatrix}. \quad (2.2.9)$$

Por otro lado, las autofunciones (reales) $e_\lambda^\varepsilon(v)$ siempre admiten la siguiente descomposición $\vec{e}_\lambda^\varepsilon(v) = \mathbf{B}(v)\vec{\psi}(v)$, con

$$\mathbf{B}(v) = \begin{pmatrix} \underline{e}_k(v) & \underline{e}_{-k}(v) \\ \underline{e}_k(v-4) & \underline{e}_{-k}(v-4) \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \vec{\psi}_k(v) = \begin{pmatrix} \psi_k(v) \\ \psi_k^*(v) \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

y donde $\psi_k(v)$ es un número complejo (aquí, el símbolo $*$ indica conjugación compleja) que codifica el ritmo de convergencia de los coeficientes $e_\lambda^\varepsilon(v)$ a sus análogos en la teoría de WDW. Por tanto, se asume que este número varía más lentamente que $\underline{e}_{\pm k}(v)$ en el límite $v \rightarrow \infty$.² Con todo esto, podemos pasar desde el estudio de la matriz de transferencia $\mathbf{A}(v)$ de los coeficientes $\vec{e}_\lambda^\varepsilon(v)$ a la matriz de transferencia $\mathbf{M}(v) = \mathbf{B}^{-1}(v+4)\mathbf{A}(v)\mathbf{B}(v)$ de los coeficientes $\vec{\psi}_k(v)$. Es posible ver que esta matriz de transferencia tiene el límite asintótico [50,91]

$$\mathbf{M}(v) = \mathbf{I} + O(v^{-3}), \quad (2.2.11)$$

²Recordemos que las autofunciones de WDW son esencialmente ondas planas en el logaritmo del volumen, $e_{\pm k}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|v|}} e^{\pm i k \ln |v|}$.

donde el símbolo O denota el siguiente orden en la expansión asintótica. Por tanto existe un límite bien definido

$$\psi_k = \lim_{v \rightarrow \infty} \psi_k(v). \quad (2.2.12)$$

En conclusión

$$e_\lambda^\varepsilon(v) \xrightarrow{v \gg 1} \psi_k e_\omega(v) + \psi_k^* e_{-\omega}(v), \quad (2.2.13)$$

donde ψ_k se puede escribir en términos de su módulo r (independiente de k), que hace las veces de constante de normalización, y de su fase $\phi_\varepsilon(k)$. Se ha comprobado numéricamente que [91]

$$\phi_\varepsilon(k) = T(|k|) + c_\varepsilon + R_\varepsilon(|k|), \quad (2.2.14)$$

donde T es una función sólo de $|k|$, c_ε es una constante y $\lim_{k \rightarrow 0} R_\varepsilon(|k|) = 0$.

La conclusión de este análisis asintótico es que cada autofunción de $\hat{\Omega}^2$, en el límite $v \rightarrow \infty$, es una combinación lineal de las dos autofunciones de WDW, cada una de ellas con el mismo peso.

2.3. Espacio de Hilbert físico

Finalmente, podemos completar la cuantización proporcionando el espacio de Hilbert físico y un conjunto completo de observables de Dirac. En la Sección 1.2.4 se determinó el espacio de Hilbert físico a partir de las soluciones a la ligadura, identificando los sectores de frecuencias positivas y negativas naturalmente asociados al tiempo interno ϕ . Aquí vamos a ver una manera alternativa, pero equivalente, de especificar el espacio de estados físicos aplicando las técnicas de promedio sobre el grupo [83–87].

En primer lugar, la contribución material está representada por el operador esencialmente autoadjunto \hat{p}_ϕ^2 , que tiene un espectro positivo y doblemente degenerado, y cuyos autovalores llamaremos $\hbar^2 \omega^2$, con $\omega \in \mathbb{R}$. Partimos de un cierto dominio denso $D(\mathcal{C})$ de definición para $\hat{\mathcal{C}}$, invariante bajo su acción y que nos va a permitir encontrar una extensión autoadjunta del operador ligadura. Un posible candidato para $D(\mathcal{C})$ es el producto tensorial de Cyl_ε^+ con el subespacio de funciones continuas de ϕ de soporte compacto. Tomemos un estado $\psi \in D(\mathcal{C})$, y designemos por $\hat{\mathcal{C}}$ la extensión autoadjunta de la ligadura. Los estados físicos $(\Psi|$ se obtienen mediante el promedio

$$(\Psi| = \int_{\mathbb{R}} dt e^{it\hat{\mathcal{C}}} \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} \int_{\mathbb{R}} d\phi \Psi(v, \phi) \langle v| \otimes \langle \phi|. \quad (2.3.1)$$

Utilizando la resolución espectral de la identidad en el espacio de Hilbert cinemático que proporcionan las autofunciones de $\widehat{\Omega}^2$ y \hat{p}_ϕ^2 , obtenemos

$$(\Psi| = \int_0^\infty d\lambda \int_{\mathbb{R}} d\omega \int_{\mathbb{R}} dt e^{it(-6\lambda/\gamma^2 + 8\pi G\hbar^2 \omega^2)} \Psi(\lambda, \omega) (e_\lambda^\varepsilon| \otimes (\omega|. \quad (2.3.2)$$

Integrando en t y ω , y recordando que $(\phi|\omega) = e^{i\omega\phi}$, al final llegamos al resultado buscado

$$\Psi(v, \phi) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\omega(\lambda)} e_\lambda^\varepsilon(v) \{ \Psi_+(\lambda) \exp[i\omega(\lambda)\phi] + \Psi_-(\lambda) \exp[-i\omega(\lambda)\phi] \}, \quad (2.3.3)$$

donde $\Psi_+(\lambda)$ y $\Psi_-(\lambda)$ pertenecen al espacio de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{phy}} = L^2(\mathbb{R}^+, \omega^{-1}(\lambda)d\lambda)$ y $\omega(\lambda) = \sqrt{3\lambda/(4\pi\gamma^2 l_{\text{Pl}}^2 \hbar)}$. Si interpretamos ϕ como un tiempo interno del sistema, es admisible una descomposición en frecuencias positivas y negativas, donde cada componente

$$\Psi_\pm(v, \phi) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\omega(\lambda)} e_\lambda^\varepsilon(v) \Psi_\pm(\lambda) e^{\pm i\omega(\lambda)\phi} \quad (2.3.4)$$

ha sido evolucionada desde el dato inicial $\Psi_\pm(v, \phi_0)$ a través del operador de evolución unitario $\Psi_\pm(v, \phi) = U_\pm(\phi - \phi_0) \Psi_\pm(v, \phi_0)$, y, como ya habíamos comentado,

$$U_\pm(\phi - \phi_0) = \exp \left[\pm i \sqrt{\frac{3\widehat{\Omega}^2}{4\pi\gamma^2 l_{\text{Pl}}^2 \hbar}} (\phi - \phi_0) \right]. \quad (2.3.5)$$

Finalmente, introduciendo un conjunto completo de observables, podemos interpretar el sistema en una imagen de evolución. Este conjunto estaría dado, por ejemplo, por la constante de movimiento \hat{p}_ϕ y el observable relacional $\ln|\hat{v}|_{\phi_0}$ (consúltese la Sección 1.2.4 para más detalles). Estos observables preservan los sectores de frecuencias positivas y negativas, lo que nos permite restringirnos, por ejemplo, al sector de frecuencias positivas dado por $\Psi_+(v, \phi)$.

2.4. Consecuencias físicas y novedades

Hasta este momento hemos sido capaces, al menos, de completar la cuantización, pero no hemos discutido las consecuencias físicas que se pueden deducir de nuestra prescripción.

En primer lugar, en la Sección 2.2.1 dedujimos el comportamiento asintótico de las autofunciones $(e_\lambda^\varepsilon|$ del operador $\widehat{\Omega}^2$. Utilizando los métodos propuestos en las Refs. [50, 91], hemos visto que los coeficientes $e_\lambda^\varepsilon(v)$ en el límite $v \rightarrow \infty$ tienden a una onda estacionaria de tipo WDW, donde cada una de las autofunciones $e_{\pm k}^\varepsilon(v)$ contribuye exactamente con el mismo peso. Además, los coeficientes $e_\lambda^\varepsilon(v)$ tienen soporte en semirredes

del tipo $v = \varepsilon + 4n$, con ínfimo dado por ε . Esto se traduce inmediatamente en que cualquier estado físico $\Psi_+(v, \phi)$ emerge, sin ningún tipo de condición de frontera, a partir de la sección de volumen mínimo $v = \varepsilon$, y se extiende hacia $v \rightarrow \infty$. Pero no lo hace de cualquier manera. Basta con fijarse en que cada componente de WDW, $e_{\pm k}(v)$, se puede identificar con un universo en expansión o en contracción. Estas dos componentes contribuyen de forma equiparable en $e_{\lambda}^{\varepsilon}(v)$, y en consecuencia en $\Psi_+(v, \phi)$. La conclusión que alcanzamos es que cualquier universo en contracción proveniente de $\phi \rightarrow -\infty$ evolucionará de forma irremediable hacia un universo en expansión $\phi \rightarrow \infty$ (si bien sólo ciertos estados estarán picados en trayectorias clásicas en estas dos regiones asintóticas). Dado que todos estos resultados son propiedades intrínsecas de las autofunciones $e_{\lambda}^{\varepsilon}(v)$, y que son independientes de λ y de ε , deducimos que la única posibilidad permitida para cualquier estado físico con soporte en cualquier sector de superselección es un escenario de rebote.

Podemos ir más lejos aún. Hemos visto que $\hat{\Omega}^2$ implica una ecuación en diferencias que se puede interpretar como una ecuación de evolución en el parámetro v . Pero esta ecuación en diferencias no extiende su dominio de definición a toda la recta real, como ocurre con el operador correspondiente de las Refs. [24–26]. Gracias a que en nuestro modelo se ha tenido en cuenta la orientación de la tríada como parte fundamental en el proceso de cuantización, algunos de los coeficientes del operador en diferencias se anulan y su dominio de definición se puede reducir a un solo semieje de la recta real. La consecuencia directa es que cualquier solución a esa ecuación en diferencias, por consistencia, va a estar completa y unívocamente determinada, por ejemplo, por sus datos iniciales (salvo un factor de proporcionalidad) definidos en la sección de volumen mínimo $v = \varepsilon$. Como veremos más adelante, este hecho abre las puertas a la cuantización (o resolución) de un sinnúmero de modelos cosmológicos (o sistemas físicos en general).

2.5. Discusión y conclusiones

El modelo de FLRW plano acoplado a un campo escalar sin masa ha sido estudiado detalladamente en el contexto de cosmología cuántica de lazos. Los trabajos en los que se establecieron las bases de su teoría [22, 27, 82] se vieron luego completados y superados por otros en los que se han desvelado las propiedades físicas del modelo cuántico [23, 24]; aunque el punto de inflexión lo marcó un estudio cuidadoso de la dinámica [25], junto con un análisis analítico del modelo [26].

Motivados por el hecho de entender todavía en mayor profundidad la verdadera naturaleza del rebote cuántico, junto con el ánimo de resolver ciertos aspectos técnicos,

como definir un procedimiento riguroso para introducir un cambio de densitización, o simplificar los sectores de superselección preservando sus buenas propiedades físicas, hemos propuesto una prescripción cuántica alternativa [44], que no sólo resuelve todas esas cuestiones de una manera sencilla, sino que también hereda todas las propiedades físicas buenas de los modelos elaborados hasta el momento [25, 26].

Es momento, pues, de desgranar las razones por las que nuestra propuesta ha conseguido ir más allá que las precursoras de esta rama de la cosmología cuántica. En primer lugar, el proceso de densitización que daba lugar al operador $\hat{\Theta}$ originalmente introducido en las Refs. [24, 25] no era satisfactorio, ya que dicho operador tenía una actuación mal definida sobre el estado $|v = 0\rangle$. Un refinamiento posterior de este proceso, que se llevó a cabo en [27], todavía carecía de una rigurosidad completa. Nosotros, en cambio, hemos seguido el proceso de densitización introducido originalmente en [54] y lo hemos adaptado a una situación de isotropía [44, 90]. En un primer paso, la ligadura hamiltoniana que hemos propuesto permite desacoplar el estado $|v = 0\rangle$ que corresponde a la singularidad clásica, lo que interpretamos como una resolución de la misma. Hemos establecido entonces una biyección entre las soluciones de la ligadura y las soluciones de su versión densitizada, pudiendo restringir el análisis a esta última. Este método dota a la teoría de consistencia y rigurosidad de una forma simple y natural. Además, al menos en principio, el procedimiento que sugerimos puede ser extendido a modelos de complejidad superior de manera análoga.

Por otra parte, hemos visto que esta ligadura introduce sectores de superselección, todos ellos con soporte en semirredes de paso cuatro en el volumen, mientras que los sectores de superselección de las prescripciones de las Refs. [25, 26] tienen soporte en redes enteras de paso cuatro, estando las dos orientaciones de la tríada acopladas entre sí. En esta situación, si uno quiere restringir el estudio a uno de los semiejes de la tríada imponiendo, por ejemplo, una simetría consistente en una transformación bajo paridad ($v \rightarrow -v$), el resultado es que uno se ve forzado a mezclar (en general) dos sectores de superselección de la forma $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \oplus \mathcal{H}_{4-\varepsilon}^-$, aspecto que complica el análisis de este tipo de prescripciones, salvo en aquellas situaciones en las que los propios sectores de superselección ya son simétricos ($\varepsilon = 2, 4$), y uno puede restringirse sin mayor complicación a cualquiera de ellos.³

Junto con los resultados de las Refs. [25, 50, 82, 91], hemos sido capaces además de probar que $\hat{\Omega}^2$ es un operador esencialmente autoadjunto, positivo y con espectro no degenerado, a diferencia de las otras prescripciones donde el espectro, en general, resulta ser doblemente degenerado. La simplicidad de los sectores de superselección hace

³Esto es lo que se asume en [26], donde todo el análisis se restringe al sector que corresponde justo a $\varepsilon = 4$.

que las autofunciones de $\hat{\Omega}^2$ puedan determinarse sin ambigüedades, y con un límite asintótico idóneo de onda estacionaria de WDW exacta. En cambio, en las Refs. [25, 26] (y dentro de una situación general), ese comportamiento de onda estacionaria sólo se alcanza de forma aproximada, y a costa de mezclar dos sectores de superselección, lo que da lugar a una pérdida sobre el control de la continuidad de las autofunciones en ese límite asintótico, aunque sin consecuencias físicas apreciables.

Las propiedades excepcionales de $\hat{\Omega}^2$ permiten caracterizar las soluciones y proporcionar el espacio de Hilbert físico, donde cada solución está definida hasta (o a partir de) la sección con $v = \epsilon$, y es una combinación lineal de ondas planas (en $\ln|v|$) entrantes y salientes, ambas con una contribución de exactamente el mismo peso. Estas propiedades extraordinarias nos permiten afirmar que el único resultado posible es que todo el flujo entrante (universo en contracción) evolucione a flujo saliente (universo en expansión). Más aún, esto sucede independientemente del estado físico que se tenga en consideración, y del sector de superselección al que se restrinja el estudio, por lo que el paradigma de rebote cuántico está garantizado. En las prescripciones precedentes es la restricción a estados semiclásicos picados alrededor de trayectorias clásicas [25] o a sectores de superselección muy concretos [26] lo que permite la aparición de un escenario de rebote cuántico.

Con el ánimo de comparar nuestra propuesta con las alternativas existentes en la literatura, en el siguiente capítulo vamos a desglosar y detallar las ventajas e inconvenientes de las diferentes prescripciones, respecto a sus propiedades analíticas, la eficiencia que presentan desde un punto de vista numérico y las posibles discrepancias físicas, desde las más evidentes debidas a la diferencia en el orden de factores de los operadores implicados, a las menos obvias que podrían emerger de la distinción entre los sectores de superselección que aparecen en cada prescripción y sus consecuencias al construir el espacio de Hilbert físico.

Capítulo 3

Estudio numérico de las diferencias entre las prescripciones más relevantes

En los capítulos anteriores hemos analizado las propiedades más generales que comparten las prescripciones más relevantes en cosmología cuántica de lazos (Capítulo 1), junto con un estudio detallado de una de ellas propuesta por nosotros (véanse el Capítulo 2 y la Ref. [44]), haciendo una comparativa general con las prescripciones de las referencias [25] y [26]. Aunque todas ellas proporcionan una visión del modelo similar –al menos para aquellos estados que admiten una época en la que el universo es semiclásico–, es necesario estudiar los detalles finos de cada una y comparar aspectos tales como los resultados físicos que proporcionan.

En particular, vamos a estudiar cuatro prescripciones que han sido propuestas en los últimos años, basándonos en los resultados de [58]. La primera de ellas es la considerada en la Ref. [25], conocida como prescripción *APS* debido a las iniciales de los apellidos de sus autores, y que fue donde se discutió por primera vez en profundidad el papel de la dinámica para los estados físicos en cosmología cuántica de lazos. Otra de las prescripciones que vamos a considerar es una versión simplificada de la prescripción *APS*, y que fue introducida por primera vez en la Ref. [26] con el ánimo de alcanzar un nivel resolutivo analítico del modelo; nos referiremos a ella como prescripción *sLQC*, debido a las siglas (en inglés) de cosmología cuántica de lazos simplificada o resoluble. Además de estas dos prescripciones, incluiremos la prescripción originalmente estudiada en la Ref. [44], y que ha sido detallada en el Capítulo 2. Esta prescripción, que llamaremos a partir de ahora *MMO*, de acuerdo a las iniciales de sus autores, permite ampliar el nivel resolutivo para este tipo de sistemas, garantizando el paradigma de rebote cuántico. Por último, vamos a incluir una versión simplificada del mismo y que comparte las mismas propiedades que la prescripción *MMO* (véanse las Refs. [17, 58]).

A esta versión la identificaremos como prescripción *sMMO*.

Nuestra intención es llevar a cabo una comparativa tanto numérica como analítica de cada una de estas prescripciones, y discutir cómo las predicciones físicas se ven afectadas por cada propuesta. Estudiaremos principalmente estados físicos que no estén fuertemente picados en trayectorias clásicas, puesto que es donde se espera que las diferencias sean más acentuadas. Veremos que existen distinciones sustanciales entre ellas en cuestiones físicas, aunque los valores esperados de los observables físicos más comúnmente estudiados no se vean afectados significativamente. En consecuencia, la dinámica efectiva que cada una de las prescripciones predice puede verse influida, por lo que los efectos deben ser tenidos en cuenta.

3.1. Prescripciones

En esta sección vamos a detallar los puntos esenciales en los que se basa cada una de las prescripciones que vamos a estudiar. El primero consiste en la elección inicial que se realiza, ya en el nivel clásico, de la ligadura que va a ser promovida a operador cuántico. A veces, de manera no completamente rigurosa, esta libertad se describe mediante una elección correspondiente de la función lapso. Por ejemplo, clásicamente tenemos cierta libertad para elegir entre la función lapso N_0 que está naturalmente asociada a la ligadura escalar C , o podemos tomar una función lapso nueva \tilde{N}_0 asociada a \mathcal{C} (la versión densitizada de C), ambas relacionadas mediante $N_0 = \tilde{N}_0 V$. En la práctica, se está así declarando qué función del espacio de fases se considera que proporciona la ligadura fundamental del sistema. Esta elección no tiene especial relevancia en el sistema clásico que estamos considerando, aunque es bien sabido que su aplicación a una situación general presenta serias dificultades [1].

Otro de los aspectos que se debe tener presente es la expresión específica de la ligadura que se va a promover a operador cuántico en términos de holonomías y flujos. La presencia de productos de operadores que no conmutan introduce cierta ambigüedad que evidencia la libertad que se tiene para elegir el orden de factores. Un ejemplo son los productos de operadores del tipo $(\widehat{V} [\widehat{1/V}])$, donde $[\widehat{1/V}]$ es una versión regularizada del operador inverso de \widehat{V} , y cuyo producto con él no es la identidad.

Todas estas ambigüedades han dado lugar a diferentes prescripciones para la cuantización de un espaciotiempo de FLRW acoplado a un campo escalar sin masa. A continuación vamos a detallar la construcción que da lugar a cada una de ellas, y las propiedades más relevantes que las caracterizan, empezando por la prescripción APS (*Ashtekar–Pawlowski–Singh*) que aparece en la Ref. [25] seguida de su versión resoluble o simplificada sLQC [26]. Dado que la prescripción MMO (*Martín Benito–Mena*

Marugán–Olmedo) ya fue detallada en el Capítulo 2, sólo daremos los detalles más relevantes para pasar a su versión simplificada sMMO, y que ha sido incluida en las Refs. [17, 58].

3.1.1. Prescripción APS

Esta prescripción fue la que se consideró inicialmente en la Ref. [25], y que dio rigor, completitud y empuje a la cosmología cuántica de lazos. Algunos de los aspectos técnicos de esta prescripción, elaborados posteriormente, se pueden encontrar en la Ref. [27].

A continuación vamos a detallar la prescripción que se sigue para llegar a la ligadura hamiltoniana cuántica:

- (I) La densitización de la ligadura coincide con la estándar utilizada en la teoría completa de gravedad de lazos, eligiendo el lapso $N_0 = 1$.
- (II) Al pasar de la formulación clásica en términos de conexiones a la cuántica usando holonomías, uno elige un orden de factores algebraicamente simple

$$\hat{C}_{\text{gr}} \propto -(\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}}) \hat{V} (\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}}). \quad (3.1.1)$$

Para dar la ligadura en una forma más conveniente (1.2.27), vamos a utilizar el operador \hat{B} de autovalores

$$B(v) = \frac{27}{8} |v| |v+1|^{1/3} - |v-1|^{1/3} \Big|^3. \quad (3.1.2)$$

Pero uno debe tener cuidado, puesto que este operador no es invertible en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$, ya que su kernel coincide con el estado de norma finita $|v=0\rangle$. La manera de solucionar este problema es redefinir la acción del operador $\hat{\Theta}$ resultante, restringida al sector simétrico de la teoría, del siguiente modo. Definimos sus coeficientes como [véanse las Ecs. (1.2.28) y (1.2.29)]

$$f(v) = [\beta(v+2)]^{1/2} \tilde{f}(v) [\beta(v-2)]^{1/2}, \quad (3.1.3a)$$

$$f_o(v) = \beta(v) [(1 - \delta_{v,-4}) \tilde{f}(v+2) + (1 - \delta_{v,4}) \tilde{f}(v-2)], \quad (3.1.3b)$$

donde

$$\tilde{f}(v) = \frac{3\pi G}{8} |v| |v+1| - |v-1|, \quad (3.1.4a)$$

$$\beta(v) = \begin{cases} [B(v)]^{-1}, & v \neq 0, \\ 0, & v = 0. \end{cases} \quad (3.1.4b)$$

Para el sector antisimétrico en v , uno puede obtener expresiones similares, pero en ese caso los términos $\delta_{v,\pm 4}$ no van a contribuir.

Puede verse que el operador evolución de esta prescripción, que llamaremos $\hat{\Theta}_{APS}$, y cuyos coeficientes están dados en la Ec. (3.1.3), está bien definido. Además, la ligadura densitizada construida a partir suyo da esencialmente la misma descripción física que su versión sin densitizar. Los estados físicos en ambos casos están caracterizados, entre otras cosas, por la condición

$$\Psi(0, \phi) = 0. \quad (3.1.5)$$

El modo en que hemos presentado esta prescripción no involucra un desacoplo del estado $|v = 0\rangle$ en las primeras instancias del proceso de resolución del modelo. Pero al final no habrá contribución suya alguna en el espacio de estados físicos.

El comportamiento asintótico de sus coeficientes (3.1.3) es tal que las contribuciones subdominantes de los mismos están caracterizadas por [véanse las Ecs. (1.2.29)]

$$\alpha = \alpha_{APS} = \frac{5}{9}. \quad (3.1.6)$$

Como dijimos en el Capítulo 1, la estructura del espacio de Hilbert físico está ligada a los sectores de superselección de cada prescripción. Para esta prescripción, podemos distinguir dos casos:

- (I) Para $\varepsilon = 2, 4$ (y teniendo presente la restricción a los sectores simétrico/antisimétrico de la teoría), los subdominios $v > 0$ y $v < 0$ están desacoplados, y por tanto la restricción de $\hat{\Theta}_{APS}$ a cualquiera de estos subespacios tiene un espectro no degenerado. En consecuencia, el espacio de Hilbert es $\mathcal{H}_{\text{phy}}^{\varepsilon=2,4} = L^2(\mathbb{R}^+, dk)$. De ahora en adelante, a estos casos tan especiales los denominaremos *sectores de superselección excepcionales* o sencillamente *excepcionales* (siguiendo los convenios de la Ref. [24]).
- (II) Si $\varepsilon \neq 2, 4$, las dos orientaciones de la tríada están ligadas a través de la acción del operador $\hat{\Theta}_{APS}$, y cada uno de sus espacios propios tiene dimensión 2. El espacio de Hilbert físico en estos casos es $\mathcal{H}_{\text{phy}}^{\varepsilon} = L^2(\mathbb{R}, dk)$. Como ésta es la situación habitual que uno encuentra en esta prescripción, nos referiremos a estos subespacios como *sectores de superselección genéricos* o simplemente *genéricos*.

Esta dicotomía afecta, en particular, a los sectores de superselección simétricos de la teoría, y en consecuencia a los estados físicos que ellos proporcionan. Para los casos excepcionales uno siempre puede restringir el estudio a funciones de soporte en semirredes

$$\mathcal{L}_{\varepsilon}^{\pm} = \{\pm(\varepsilon + 4n), n \in \mathbb{N}\} \quad (3.1.7)$$

y extenderlas después a un dominio que sea invariante bajo cambio de paridad.

Sin embargo, los sectores de superselección genéricos tienen soporte en redes enteras del tipo $\mathcal{L}_\varepsilon = \{\varepsilon + 4n, n \in \mathbb{Z}\}$. Estas redes no son invariantes si son reflejadas respecto a $v = 0$ y uno no tiene más remedio que trabajar uniendo dos redes, $\mathcal{L}_\varepsilon \cup \mathcal{L}_{4-\varepsilon}$, primero construyendo el estado en \mathcal{L}_ε y después extendiéndolo por paridad. Como veremos, esto nos va a obligar a utilizar una metodología diferente a la hora de construir numéricamente las autofunciones simétricas $e_k^\varepsilon(v)$.

Desafortunadamente, el espacio de Hilbert físico que se deduce a partir de las situaciones genéricas que presenta esta prescripción es dos veces mayor que en los casos excepcionales. Para los casos de interés físico (universos semiclásicos en expansión a tiempos tardíos), los estudios se restringen en la práctica a una de las mitades del espacio de Hilbert físico, que está asociado a una mitad de la base de autofunciones. Como veremos en la Sección 3.3.1, uno elige este subespacio de tal modo que el comportamiento de las autofunciones se ajuste lo más posible a los elementos de la base de los casos excepcionales. Este comportamiento hará que las autofunciones tengan condiciones adicionales en su límite WDW. La otra mitad de la base se puede definir como una compleción ortogonal de la base de autofunciones, respecto a los elementos ya construidos.

3.1.2. Prescripción sLQC

Esta prescripción fue introducida por primera vez en la Ref. [26]. La intención era simplificar el operador evolución $\hat{\Theta}_{APS}$ al máximo, adaptándolo de tal modo que se pudiera llevar a cabo una resolución analítica del modelo. Esta prescripción consiste en:

- (I) La ligadura se define como una densidad escalar de peso unidad. Formalmente, esto corresponde a elegir la función lapso $N_0 = V$.
- (II) En cuanto a la parte gravitacional de la ligadura de esta prescripción, se elige el orden de operadores

$$\hat{\Theta}_{sLQC} \propto -\hat{V}[\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}}]^2 \hat{V}. \quad (3.1.8)$$

El hecho de promover la versión densitizada de la ligadura directamente a operador cuántico no afecta a los resultados físicos en este modelo en particular. Pero debemos recordar que, en la teoría completa, da lugar a ciertas inconsistencias [1].

Los coeficientes del operador $\hat{\Theta}_{sLQC}$ resultantes son

$$f(v) = \frac{3\pi G}{4} \sqrt{|v+2|} |v| \sqrt{|v-2|}, \quad (3.1.9a)$$

$$f_o(v) = \frac{3\pi G}{2}v^2, \quad (3.1.9b)$$

y por tanto son más simples que los de la prescripción APS desde el punto de vista algebraico. Además, podemos ver que los términos subdominantes (1.2.29) en el límite asintótico se identifican con

$$\alpha = \alpha_{sLQC} = 0. \quad (3.1.10)$$

Esta elección proporciona un operador para el que se puede tomar como dominio invariante el complemento ortogonal de $|v = 0\rangle$, por lo que las soluciones a la ligadura escalar densitizada, construidas mediante la actuación del operador de evolución tras deparametrizar el sistema, no tendrán contribución alguna del estado mencionado. No obstante, es importante destacar que, a diferencia de la ligadura (2.1.3) que presentamos en el Capítulo 2, ésta no aniquila al estado de volumen nulo, debido a que la contribución material [véase la Ec. (1.2.27)] actúa como la identidad sobre él.

Una de las ventajas que presenta esta prescripción es que permite construir el operador *densidad de energía* como

$$\hat{\rho} = -\frac{3}{32\pi G\Delta\gamma^2}(\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}})^2. \quad (3.1.11)$$

Es posible demostrar que el espectro de este operador $\hat{\rho}$ viene dado por el intervalo $[0, \rho_c]$, donde

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G\Delta\gamma^2}. \quad (3.1.12)$$

Este valor máximo de la densidad de energía se suele llamar *densidad de energía crítica* [25].

Otra propiedad interesante de esta prescripción es que es posible encontrar una representación [véanse las Ecs. (3.16) y (3.17) de la Ref. [26]] en la que el operador evolución queda reducido a $\hat{\Theta}_{sLQC} = -\partial_{\bar{x}}^2$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{12\pi G} \ln \left(\tan \frac{\bar{\mu}c}{2} \right). \quad (3.1.13)$$

La estructura del espacio de Hilbert físico es exactamente la misma que para la prescripción APS. De nuevo, uno encuentra los dos casos: i) las situaciones excepcionales con $\varepsilon = 2, 4$, donde diferentes orientaciones de la tríada o bien están intrínsecamente desacopladas o la restricción al sector simétrico, de forma natural, permite eliminar la degeneración del espectro del operador evolución, y ii) el caso genérico (resto de valores de ε). El espacio de Hilbert físico es $\mathcal{H}_{\text{phy}}^\varepsilon = L^2(\mathbf{R}, dk)$, donde \mathbf{R} puede ser \mathbb{R}^+ ó \mathbb{R} , dependiendo de la degeneración del espectro del operador $\hat{\Theta}_{sLQC}$ (aunque en la práctica vamos a restringir el estudio a uno de los semiejes de la recta real, debido al tipo de estados que vamos a considerar, como ya hemos comentado).

3.1.3. MMO

Esta prescripción ya ha sido explicada en detalle en el Capítulo 2. De todos modos, vamos a resumir los principales aspectos que la caracterizan. Recordemos, en primer lugar, que esta propuesta está motivada por los estudios realizados en cosmologías anisótropas del tipo de Bianchi I [54], donde la orientación de la tríada $\text{sgn}(v)$ toma un papel fundamental. Su aplicación a un caso de isotropía [44] se caracteriza por:

- (I) La cuantización comienza a partir de la ligadura escalar con una densitización similar a la de la teoría completa.
- (II) La parte gravitacional de la ligadura se define a partir del modelo de Bianchi I, tras identificar las tres direcciones de anisotropía.

El operador que resulta fue descrito en la Sección 2.1.1. Allí vimos que era posible establecer un cambio de densitización tal que el nuevo operador presenta una separación explícita entre la geometría y el contenido material. Este cambio de densitización se lleva a cabo a través de un proceso riguroso y a la vez natural. Los coeficientes del operador $\hat{\Theta}_{MMO}$ son [véanse las Ecs. (2.1.5) y (2.1.6)]

$$f(v) = \frac{\pi G}{12} g(v+2)g(v-2)g^2(v)s_+(v)s_-(v), \quad (3.1.14a)$$

$$f_o(v) = \frac{\pi G}{12} g^2(v) \{ [g(v+2)s_+(v)]^2 + [g(v-2)s_-(v)]^2 \}, \quad (3.1.14b)$$

donde $s_{\pm}(v)$ y $g(v)$ son las mismas funciones que aparecen en las Ecs. (2.1.8) y (2.1.9), respectivamente.

Ya vimos que este operador tiene varias propiedades de considerable interés. Entre ellas están:

- (I) Se puede escribir como el cuadrado de otro operador, $\hat{\Theta}_{MMO} \propto \hat{\Omega}^2$, donde $\hat{\Omega}$ es un operador en diferencias de segundo orden (consúltese la Ec. (7) de la Ref. [44]).
- (II) Los coeficientes $f(v)$ y $f_o(v)$ se anulan en todo el intervalo $v \in [-2, 2]$.

Esto último implica que los estados con soporte en diferentes orientaciones de la tríada no están ligados a través de la acción de $\hat{\Theta}_{MMO}$. Además, puede comprobarse que los sectores de superselección asociados a este operador tienen soporte en semirredes de paso cuatro (véase la Sección 2.1.2), y la restricción de $\hat{\Theta}_{MMO}$ a cada uno de ellos es un operador esencialmente autoadjunto, positivo y con un espectro absolutamente continuo no degenerado (como se vio en la Sección 2.1.3). En conclusión, todos y cada

uno de los sectores de superselección (sin ninguna salvedad) tienen la misma estructura que los sectores de superselección excepcionales de las prescripciones presentadas anteriormente.

Otra propiedad interesante es que todos los elementos de la base de autoestados convergen en el límite de v grande a ondas estacionarias de WDW exactas. Este comportamiento es una característica general de esta prescripción, y coincide con el de los casos excepcionales $\varepsilon = 2, 4$ de las dos prescripciones anteriores. Recordemos, no obstante, que esas dos propuestas presentan, además, sectores en los que el límite anterior contiene inevitablemente una pequeña desviación (amortiguada exponencialmente como función de k) no nula del comportamiento de onda estacionaria, similar al efecto túnel en una barrera de potencial.

Como vimos en la Sección 2.3, no sólo la estructura del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{phy}}^\varepsilon$ es la misma en todos los casos, independientemente del sector de superselección considerado, si no que desde el punto de vista técnico la descripción adopta una simplicidad cualitativamente mayor (como se discutirá en detalle en la Sección 3.3).

Finalmente, las expansiones asintóticas de $f(v)$ y $f_o(v)$ para $v \rightarrow \infty$ conducen a

$$\alpha = \alpha_{MMO} = \frac{5}{3}. \quad (3.1.15)$$

3.1.4. sMMO

Esta prescripción ha sido estudiada recientemente en la literatura [17, 58]. Presenta propiedades heredadas de las prescripciones sLQC y MMO:

- (I) De los procesos de densitización explicados anteriormente, y siendo fieles a la teoría completa, utilizaremos la densitización de la prescripción MMO.
- (II) La parte gravitacional se deduce de manera análoga a como se hace para MMO.

De nuevo, la función $\text{sgn}(v)$ desempeña un papel relevante en esta prescripción. La diferencia esencial respecto a MMO es que definiremos los coeficientes del operador $\hat{\Theta}_{sMMO}$ de la forma más sencilla posible. Con estas elecciones, el operador correspondiente está determinado por:

$$f(v) = \frac{3\pi G}{16} \sqrt{|v+2|} |v| \sqrt{|v-2|} s_+(v) s_-(v), \quad (3.1.16a)$$

$$f_o(v) = \frac{3\pi G}{16} |v| \left[|v+2| s_+^2(v) + |v-2| s_-^2(v) \right], \quad (3.1.16b)$$

con las funciones $s_{\pm}(v)$ dadas por la Ec. (2.1.8). El comportamiento asintótico de estos coeficientes da lugar a

$$\alpha = \alpha_{sMMO} = 0. \quad (3.1.17)$$

Esta prescripción comparte todas las propiedades cualitativas del operador MMO: el espectro, el desacoplo del estado $|v = 0\rangle$, el hecho de que diferentes orientaciones de la tríada no estén vinculadas en ninguno de los sectores de superselección, y todas las demás propiedades que se derivan de éstas (véase la Sección 3.1.3 y el Capítulo 2). Además, el operador evolución resultante tras la deparametrización se diferencia del de la prescripción sLQC en un operador diagonal de soporte compacto $v \in (-4, 4) \setminus \{0\}$. En el caso del sector de superselección $\varepsilon = 4$, dicha diferencia es nula. Esto nos permite concluir que la prescripción sMMO, además, admite el mismo análisis analítico de la Ref. [26], que se realizó originalmente para la prescripción sLQC.

3.2. Medición de las diferencias entre prescripciones

Una vez que hemos detallado las prescripciones que van a ser comparadas, vamos a describir el procedimiento con el que pretendemos determinar físicamente las diferencias existentes entre ellas. Por un lado, sabemos que el orden de factores elegido en cada prescripción es distinto, lo que por supuesto debe poder ser detectado. Además, los sectores físicos en cada caso son diferentes. Este hecho será estudiado en la Sección 3.2.1. Como veremos en la Sección 3.3.2, el módulo de las funciones de onda de diferentes prescripciones presenta diferencias cualitativas, que en principio podrían ser detectadas. Por otro lado, en la Sección 3.3.3 realizaremos un análisis detallado de los valores esperados de ciertos observables, tales como funciones del volumen, la densidad de energía o el parámetro de Hubble. Este análisis proporcionará una noción de cómo de diferentes son las prescripciones.

3.2.1. Operador diferencia: intensidad del potencial

En primer lugar vamos a dotar de significado físico a la constante α que caracteriza en parte cada prescripción. Uno puede separar convenientemente el operador evolución del siguiente modo

$$\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_o + \widehat{\delta\Theta}, \quad (3.2.1)$$

donde $\widehat{\delta\Theta}$ es un operador compacto que contiene todos los términos $O(v^{-2})$ que se despreciaron en las Ecs. (1.2.29). Además, el operador $\hat{\Theta}_o$ se puede escribir de una forma alternativa si se expresa en términos de v y el momento canónicamente conjugado b

que satisface $\{v, b\} = 4$. Si introducimos la transformación

$$[\mathfrak{F}\psi](b) = \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon} e^{ivb/4} \psi(v) \quad (3.2.2)$$

y hacemos el cambio de coordenadas $x = \ln[\tan(b/4)]/2$, podemos llegar a [82]

$$\hat{\Theta}_o = -12\pi G \left[\frac{\alpha + 1}{4 \cosh^2(2x)} + \partial_x^2 \right]. \quad (3.2.3)$$

Podemos ver que la constante α adquiere un significado inmediato: determina la intensidad del potencial al que están sometidas las soluciones de esta ecuación diferencial (en la Ref. [82] pueden encontrarse más detalles al respecto).

Claramente, van a existir observables que pueden detectar diferencias entre prescripciones, incluso aunque no sean observables de gran interés físico en cosmología. Un observable de este tipo es la propia ligadura densitizada $\hat{\mathcal{C}}$. En realidad, dada una prescripción \mathbf{A} que puede ser APS, sLQC, MMO, o sMMO, la ligadura asociada $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{A}}$ (o más precisamente su adjunto, ya que los estados físicos no son elementos del espacio de Hilbert cinemático) obviamente aniquila todos los estados físicos $|\Psi_{\mathbf{A}}\rangle \in \mathcal{H}_{\text{phy}}^{\mathbf{A}}$, mientras que no lo hace en general con los estados físicos de otra prescripción $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$. Esto se traduce en

$$\forall \mathbf{A} \neq \mathbf{B}, \quad \begin{cases} \forall \chi \in \mathcal{H}_{\text{kin}} : & (\Psi_{\mathbf{A}} | \hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{A}} | \chi) = 0, \\ \exists \chi \in \mathcal{H}_{\text{kin}} : & (\Psi_{\mathbf{A}} | \hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{B}} | \chi) \neq 0. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Para que la expresión anterior tenga completo sentido, las funciones de onda físicas $\Psi_{\mathbf{A}}(v, \phi)$ se extienden a todo el espacio de configuración de tal modo que son idénticamente nulas fuera del soporte (que dependerá de cada prescripción) donde están definidas.

La diferencia entre dos ligaduras es de la forma

$$\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{A}} - \hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{B}} = \widehat{\Delta\Theta}_{\mathbf{AB}} \otimes \mathbf{I}, \quad \widehat{\Delta\Theta}_{\mathbf{AB}} = \hat{\Theta}_{\mathbf{A}} - \hat{\Theta}_{\mathbf{B}}, \quad (3.2.5)$$

siendo $\widehat{\Delta\Theta}_{\mathbf{AB}}$ un observable cinemático bien definido en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$. A partir de él podemos definir la familia de observables $\widehat{\Delta\Theta}_{\mathbf{AB}}|_\phi$ siguiendo el procedimiento explicado en la Sección 1.2.4, lo que nos permite no sólo detectar diferencias entre prescripciones, si no también ver cómo varían con la evolución.

Para entender la naturaleza de estas diferencias, notamos que podemos descomponer el operador $\widehat{\Delta\Theta}_{\mathbf{AB}}$ como hicimos en la Ec. (3.2.1), lo que da como resultado en la representación (de momentos) b :

$$\widehat{\Delta\Theta}_{\mathbf{AB}} = 3\pi G \frac{\alpha_{\mathbf{B}} - \alpha_{\mathbf{A}}}{\cosh^2(2x)} + \widehat{\delta\Theta}_{\mathbf{A}} - \widehat{\delta\Theta}_{\mathbf{B}}. \quad (3.2.6)$$

El término compacto $\widehat{\delta\Theta}_A - \widehat{\delta\Theta}_B$ se puede despreciar frente a la contribución generada por el término del potencial de la Ec. (3.2.6) [véase también la Ec. (3.2.1)]. Dada la forma del potencial, cabe esperar que la diferencia máxima aparecerá cerca del rebote, que correspondería a $x = 0$.

3.2.2. Observables

Además del observable que hemos introducido en la sección anterior, hemos seleccionado un conjunto de observables que son utilizados con frecuencia en cosmología: la función del volumen $\ln|\hat{v}|_\phi$,¹ el operador densidad de energía $\hat{\rho}_\phi$, obtenido a partir de

$$\hat{\rho} = \left[\frac{\hat{1}}{V} \right]^2 \otimes \hat{p}_\phi^2 = \frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{\hat{1}}{V} \right] \hat{\Theta} \left[\frac{\hat{1}}{V} \right] \otimes \mathbf{I}, \quad (3.2.7)$$

y el parámetro de Hubble definido en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$ como

$$\hat{H} = -\frac{1}{4i\gamma\sqrt{\Delta}}(\hat{\mathcal{N}}_{4\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-4\bar{\mu}}). \quad (3.2.8)$$

Obviamente, la elección de los operadores $\hat{\rho}$ y \hat{H} para representar la densidad de energía y el parámetro de Hubble no está libre de ambigüedades (por ejemplo del tipo de orden de factores). En el caso de la densidad de energía, las ambigüedades existentes se pueden fijar parcialmente al introducir el operador $\hat{\Theta}$ para su definición. En cambio, para el parámetro de Hubble, simplemente tomamos una definición bien adaptada al modelo cuántico que estamos analizando. Por otra parte, hacemos ver que todos ellos dejan los espacios de Hilbert \mathcal{H}_ε invariantes.

Estos operadores serán analizados en la Sección 3.3.3 donde, para cierto tipo de estados, compararemos las diferencias de sus valores esperados y dispersiones, y entenderemos que las diferencias entre los valores esperados son relevantes si son al menos del orden de las dispersiones de esos mismos observables.

3.3. Estudio numérico

Las diferentes propiedades de las prescripciones que hemos considerado nos obligan a utilizar diferentes métodos numéricos en nuestro análisis. Los constituyentes

¹Este operador puede ser definido por medio de la descomposición espectral de \hat{v} en tanto en cuanto el cero no pertenezca a su espectro discreto, lo que en realidad ocurre en muchos de los casos aquí analizados. Para el resto de situaciones, si $v = 0$ está incluido, uno puede introducir métodos adecuados para definir este operador, como por ejemplo los que aparecen en el Apéndice A de la Ref. [27].

elementales a partir de los cuales vamos a construir los estados físicos van a ser las autofunciones del operador $\hat{\Theta}$, las cuáles proporcionan una base ortonormal para la parte gravitacional del espacio de Hilbert cinemático. En la Sección 3.3.1 empezaremos detallando el procedimiento que se ha de seguir para construir esta base. Después, pasaremos a estudiar (en la Sección 3.3.2) la construcción de los estados físicos, para posteriormente evaluar los valores esperados y las dispersiones de los observables en la Sección 3.3.3. Finalmente, en la Sección 3.3.4 discutiremos y compararemos la eficiencia y la precisión de los métodos utilizados en diferentes regímenes. En este estudio numérico, fijamos el parámetro de Immirzi $\gamma = 0.2375$ a través de la entropía de agujeros negros [95, 96] y $\Delta = 4\sqrt{3}\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2$ (véanse las Refs. [12, 55]). Una buena parte de los detalles de nuestro análisis se basan en los utilizados en las Refs. [24, 25, 44]. En esta tesis vamos a concentrarnos sobre todo en aquellos aspectos que, o bien son nuevos, o no pudieron ser explorados con detalle anteriormente.

3.3.1. Construcción de la base de autofunciones

Como ya hemos comentado, el operador $\hat{\Theta}$ tiene un espectro continuo, de forma que admite una base de autoestados generalizados [soluciones a la Ec. (1.2.31) no normalizables en el espacio de Hilbert cinemático]. Dependiendo de la degeneración del espectro, los elementos de la base tendrán soporte en semirredes (caso no degenerado) o en redes (caso degenerado). Cada situación nos obligará a utilizar métodos diferentes para la evaluación numérica de las autofunciones.

Autofunciones con soporte en semirredes

Ésta es la situación más simple que uno puede encontrar desde un punto de vista técnico. Se da para los sectores de superselección excepcionales $\varepsilon = 2, 4$ de las prescripciones APS y sLQC, y para todos los sectores de las prescripciones MMO y sMMO. En todos los casos, la forma particular del operador estudiado permite resolver completa y únicamente las autofunciones (delta-)normalizadas (e_k^ε) (donde $k \in \mathbb{R}^+$) a partir de su valor inicial $e_k^\varepsilon(\varepsilon)$. La única ambigüedad (irrelevante físicamente) es que podría aparecer una fase que eliminaremos pidiendo que el valor inicial de las mismas sea positivo. En cuanto uno evalúa la función en el semieje $v > 0$, se puede extender por simetría al semieje negativo, simplemente identificando $e_k^\varepsilon(-v) = e_k^\varepsilon(v)$.

Vamos a detallar el procedimiento que hemos seguido para evaluar numéricamente $e_k^\varepsilon(v)$ para $v > 0$. Lo primero que debemos recordar (véanse también, por ejemplo, las Refs. [58, 91]) es que el límite asintótico de $e_k^\varepsilon(v)$ es de la forma

$$e_k^\varepsilon(v) \rightarrow r[e^{i\phi_k^\varepsilon} \underline{e}_k(v) + e^{-i\phi_k^\varepsilon} \underline{e}_{-k}(v)], \quad (3.3.1)$$

donde ϕ_k^ε es una fase (número real módulo 2π), r es un número real positivo, y $e_{\pm k}(v)$ son las autofunciones generalizadas del operador WDW análogo a $\hat{\Theta}$ (ver Apéndice A). Dado que $e_{\pm k}(v)$ están normalizadas a la función delta de Dirac, la condición de normalización (1.2.32) nos permite afirmar que $r = 2$ (ver Apéndice A.2 de la Ref. [91]). Pero en la práctica, uno no sabe cuál es la relación entre el valor inicial $e_k^\varepsilon(\varepsilon)$ y el factor de normalización r . Sin embargo, sí es posible establecer la relación una vez que se ha evaluado (el límite $v \rightarrow \infty$ de) la autofunción. Para abordar este problema, vamos a dividir la evaluación de la autofunción en varias fases:

- (I) Evaluación de una autofunción auxiliar ψ_k cuya norma se desconoce.
- (II) Estudiar su límite WDW con el que se puede determinar su norma $\|\psi_k\|$ relativa a la condición (1.2.32).
- (III) Dividir dicha autofunción auxiliar por su norma, recuperando el elemento de la base deseado: $\psi_k(v) \mapsto e_k^\varepsilon(v) = \|\psi_k\|^{-1} \psi_k(v)$.

En el primer paso, construimos ψ_k tomando como dato inicial $\psi_k(\varepsilon) = 1$. Mediante la Ec. (1.2.31) evaluamos la autofunción a través de un proceso iterativo para un dominio $\mathcal{L}_\varepsilon^+ \cap I$ donde $I = [\varepsilon, v_M]$. Elegimos $v_M \gg k$, lo que nos asegura que alcanzamos sobradamente el régimen donde las correcciones al comportamiento asintótico (3.3.1) son pequeñas. En las simulaciones que hemos realizado, siguiendo estimaciones numéricas, fijamos

$$v_M \approx 4 \cdot \min[10^7, \max\{100 \cdot k, \exp(3\pi/k)\}] . \quad (3.3.2)$$

Esta elección asegura además que, para valores de k pequeños, el intervalo seleccionado contiene una oscilación de un periodo.

El segundo paso se completa utilizando un método similar a la técnica de matrices de transferencia que explicamos en la Sección 2.2.1 (véase además la Ref. [91]). En otras palabras, el valor de la autofunción en un par de puntos consecutivos de su dominio de definición se representa como una combinación lineal de funciones de la base de WDW, adoptando la forma

$$\psi_k(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi v}} \tilde{r}_k(v) \cos[kx + \phi_k(v)], \quad (3.3.3)$$

donde $x = \ln v$. Los coeficientes $\tilde{r}_k(v)$ y $\phi_k(v)$ son funciones que varían lentamente con v en el límite $v \rightarrow \infty$, convergiendo, de acuerdo con la Ec. (3.3.1), a sus límites correspondientes \tilde{r}_k^ε y ϕ_k^ε , a un ritmo

$$\tilde{r}_k(v) = \tilde{r}_k^\varepsilon \left[1 + O\left(\frac{k^2}{v^2}\right) \right], \quad (3.3.4a)$$

$$\phi_k(v) = \phi_k^\varepsilon \left[1 + O\left(\frac{k^2}{v^2}\right) \right]. \quad (3.3.4b)$$

La normalización se determina por medio de la identidad $\tilde{r}_k^\varepsilon = 2\|\psi_k\|$. Pero aún no hemos determinado cómo extraer dicho límite \tilde{r}_k^ε . El procedimiento es simple. Lo único que necesitamos es una secuencia de puntos $\{(v_n^{-1}, \tilde{r}_k^n)\}$ con $n \in \mathbb{N}$ y extrapolar numéricamente el límite deseado $v^{-1} \rightarrow 0$ (ver Apéndice B de la Ref. [24]), usando un método de extrapolación polinómica (en nuestro caso el método de Neville). En la práctica, elegimos la secuencia de puntos v_n tal que siga aproximadamente el comportamiento $v_n \approx 2^{-n}v_0$. La forma específica de evaluar \tilde{r}_k^n depende del valor de k :

1. Si $(k x_M) > 2\pi$ (k grande), con $x_M = \ln v_M$, el límite WDW (de onda estacionaria) tiene una longitud de onda pequeña, por lo que ha podido oscilar varias veces dentro del dominio elegido. Extrayendo la información de los máximos y mínimos de esas oscilaciones construimos el conjunto de pares $\{(v_n^{-1}, \tilde{r}_k^n)\}$. Con esto, introducimos el siguiente algoritmo:
 - a) buscamos un extremo de $\psi_k(v)$, es decir, un punto $v_n \in \mathcal{L}_\varepsilon^+ \cap I$ donde $|\psi_k(v_n)| > |\psi_k(v_n + 4)|$ y $|\psi_k(v_n)| > |\psi_k(v_n - 4)|$; inicialmente, empezamos la búsqueda cerca de x_M ;
 - b) hacemos una extensión analítica de ψ_k al intervalo $[v_n - 4, v_n + 4]$ por medio de una interpolación polinómica de segundo orden (en x); la función resultante tendrá la forma (3.3.3) salvo correcciones de cuarto orden;
 - c) a partir de la función interpolada determinamos el par $\{(v_n^{-1}, \tilde{r}_k^n)\}$ que corresponde a su extremo;
 - d) seguimos el proceso, buscando el siguiente extremo cerca del punto $x_n - \ln 2$; repetimos el proceso iterativamente hasta que obtenemos una secuencia de cinco puntos, o hasta que entramos en la región donde las correcciones de la cuantización polimérica se vuelven significativas ($v \lesssim k$).
2. Si $(k x_M) < 2\pi$ (k pequeño), la longitud de onda de las oscilaciones es más grande que x_M , por lo que para el dominio elegido no obtendremos un número suficiente de extremos. En consecuencia, modificamos el proceso anterior de la siguiente manera: para cada valor de v_n , con $x_n = \ln v_n$, en vez de buscar un extremo, consideramos pares de puntos consecutivos $(v_n, v_n + 4m)$ y resolvemos algebraicamente la Ec. (3.3.3) para encontrar $(r_k(v), \phi_k(v))$. En la práctica, hemos elegido el valor del entero m de tal modo que $v_n + 4m \approx 1,01v_n$.

De nuevo, una vez que la secuencia $\{(v_n^{-1}, \tilde{r}_k^n)\}$ ha sido obtenida, el límite \tilde{r}_k^n se determina utilizando una extrapolación polinómica (método de Neville) en $v^{-1} = 0$.

El procedimiento utilizado para valores pequeños de k es más simple, ya que ni implica la identificación de extremos ni la consiguiente interpolación, pero a costa de una pérdida de precisión (asumible) con respecto al método empleado para k grande. La ventaja que tiene, a parte de su sencillez, es que aún nos permite extraer la información asintótica de las autofunciones sin pagar a cambio un alto coste en recursos numéricos, donde el uso del método alternativo (para k grande) resultaría excesivamente costoso. Esta diferenciación entre k grande y pequeño no se hizo en los estudios numéricos iniciales [25] debido esencialmente a que la clase de estados allí estudiados requerían valores de k elevados. Sin embargo, la necesidad de estudiar estados con valores de k suficientemente bajos nos llevó a introducir un método complementario [58].

Autofunciones asociadas a un espectro degenerado

Esta es la situación general (sectores de superselección genéricos) que uno encuentra en las prescripciones APS y sLQC. Para construir la base de autofunciones, seguiremos (con ciertas mejoras) el procedimiento inicialmente propuesto en las Refs. [24,25]. Como ya hemos mencionado, en estos casos cada espacio propio está doblemente degenerado, aunque uno puede construir la mitad de la base, y después –en principio– definir la otra mitad por medio de una compleción ortogonal. En general, las autofunciones son soluciones de una ecuación en diferencias de segundo orden que requiere, por ejemplo, dos datos iniciales en puntos consecutivos de su dominio de definición. Una vez evaluada completamente una autofunción con dominio en una red, podemos extenderla a una autofunción simétrica (invariante bajo una transformación de paridad $v \rightarrow -v$) sin introducir condiciones adicionales en los datos iniciales que determinan la autofunción original en una red \mathcal{L}_ε . En primer lugar, la transformación de paridad mapea una red \mathcal{L}_ε en su complementaria $\mathcal{L}_{4-\varepsilon}$. En segundo lugar, bastará con identificar los coeficientes $e_k^\varepsilon(v)$ con $v \in \mathcal{L}_{4-\varepsilon}$ con los coeficientes $e_k^\varepsilon(-v)$ en la red original $v \in \mathcal{L}_\varepsilon$.

Teniendo esto en cuenta, determinamos la (mitad de la) base de autofunciones del siguiente modo:

- (I) Primero construimos en \mathcal{L}_ε una pareja de autofunciones auxiliares $\psi_k^\pm(v)$ –obviamente soluciones de la Ec. (1.2.31)– pero que converjan a los elementos de la base de WDW $\underline{e}_{-|k|}(v)$ en los límites $v \rightarrow \mp\infty$, respectivamente.
- (II) Entonces, re-escalamos las componentes adecuadamente, sumamos cada una de ellas y normalizamos el resultado a la delta de Dirac.

El primer paso en este algoritmo es elegir el dominio $I = \mathcal{L}_\varepsilon \cap [-v_M, v_M]$, donde v_M se selecciona como se hizo en la Ec. (3.3.2). Los datos iniciales para $\psi^\pm(v)$ se identifican

del modo

$$\begin{aligned}\psi^+(-v_M) &= \underline{e}_{-|k|}(-v_M), & \psi^+(-v_M + 4) &= \underline{e}_{-|k|}(-v_M + 4), \\ \psi^-(v_M) &= \underline{e}_{-|k|}(v_M), & \psi^-(v_M - 4) &= \underline{e}_{-|k|}(v_M - 4).\end{aligned}\quad (3.3.5)$$

Aunque esta construcción no coincide exactamente con (I), en la práctica aproxima esta condición con una precisión suficiente debido a la rápida convergencia de las autofunciones $\psi^\pm(v)$ a sus correspondientes límites WDW.

Una vez que las autofunciones auxiliares son evaluadas, pasamos a determinar su límite WDW en la dirección opuesta respecto a sus datos iniciales. Dado que éstos son complejos, sus límites no corresponden en general a ondas estacionarias de tipo WDW, sino que toman la forma más general

$$\psi_k^\pm(v) = a_\varepsilon^\pm e^{i\alpha_\varepsilon^\pm} \underline{e}_k(v) + b_\varepsilon^\pm e^{i\beta_\varepsilon^\pm} \underline{e}_{-k}(v), \quad (3.3.6)$$

donde $a_\varepsilon^\pm, b_\varepsilon^\pm \in \mathbb{R}^+$, mientras que $\alpha_\varepsilon^\pm, \beta_\varepsilon^\pm \in [0, 2\pi)$. Todas ellas son funciones de k , pero vamos a omitir esta etiqueta en la notación para evitar sobrecargarla. El análisis numérico muestra que la amplitud de los coeficientes a_ε^\pm y b_ε^\pm crece de manera exponencial con k (aproximadamente). Además, la autoadjunción de $\hat{\Theta}$ nos permite asegurar que $|a_\varepsilon^\pm|^2 - |b_\varepsilon^\pm|^2 = 1$ (esto último fue confirmado numéricamente en las Refs. [24, 25])

Para evaluar estos coeficientes, es más conveniente separar ψ^\pm en parte real e imaginaria, partes que designaremos de ahora en adelante por \Re y \Im , respectivamente. Dado que cada una de estas componentes converge separadamente a una onda estacionaria de WDW (se trata de dos autofunciones reales), podemos aplicar el procedimiento para el caso no degenerado de la Sección 3.3.1 a cada una de ellas. La única complicación añadida es que, a parte de determinar las amplitudes \tilde{r}_k^ε de cada una de ellas, es necesario estimar las fases ϕ_k^ε [véanse las Ecs. (3.3.4a) y (3.3.4b)]. Para ello, construimos secuencias $\{(v_n^{-1}, \phi_k^n)\}$, análogas de $\{(v_n^{-1}, \tilde{r}_k^n)\}$, y evaluamos su límite cuando $v^{-1} \rightarrow 0$. Como antes, los valores de ϕ_k^n están determinados para k grande por la posición de los extremos, mientras que para k pequeño los evaluamos algebraicamente.

Una vez que conocemos los límites de los coeficientes de las cuatro componentes $\Re[\psi^\pm]$ y $\Im[\psi^\pm]$, los coeficientes a_ε^\pm , b_ε^\pm , α_ε^\pm y β_ε^\pm pueden ser calculados fácilmente en función de ellos, y con esto podemos proporcionar la combinación lineal deseada de las dos componentes ψ^\pm . Esto involucra dos aspectos: (i) normalización, y (ii) rotación.

Respecto a la normalización, re-escalaremos la función teniendo en cuenta que

$$\|\psi_k^\pm\|^2 = \frac{1}{4}(|a_\varepsilon^\pm|^2 + |b_\varepsilon^\pm|^2 + 1). \quad (3.3.7)$$

Esto asegura que cada una de las componentes consideradas contribuye con el mismo peso al elemento final de la base. El resultado final para ambos límites $v \rightarrow \pm\infty$ es

que la autofunción tenderá (aproximadamente) a una onda estacionaria de WDW, con la misma amplitud en ambas direcciones, asemejándose a las autofunciones estudiadas en la Sección 3.3.1, pero estarán rotadas por una fase compleja global que se puede compensar introduciendo la rotación opuesta para ψ^\pm en el plano complejo determinada por

$$\chi_\varepsilon^\pm = -\frac{1}{2}(\alpha_\varepsilon^\pm + \beta_\varepsilon^\pm). \quad (3.3.8)$$

Este paso nos va a permitir mejorar las propiedades semiclásicas de los estados físicos contruidos a partir de los elementos de la base que estamos evaluando en este trabajo. Este procedimiento es nuevo respecto a los algoritmos utilizados en las Refs. [24, 25].

El resultado al que llegamos es que las dos componentes originales han sido manipuladas convenientemente para dar lugar a

$$\tilde{\psi}_k^\pm(v) = e^{i\chi_\varepsilon^\pm} \|\psi_k^\pm\|^{-1} \psi_k^\pm(v). \quad (3.3.9)$$

Es posible comprobar que cada una de ellas, en los límites correspondientes $v \rightarrow \pm\infty$, se comporta similarmente a la Ec. (3.3.1) salvo correcciones del orden de $(a_\varepsilon^+)^{-1}$, lo que resulta ser una muy buena aproximación para $k \gg 1$ (recordemos que tanto a_ε^+ como b_ε^+ crecen exponencialmente con k).

Finalmente, sumamos ambas componentes y normalizamos el resultado, logrando

$$\tilde{e}_k^\varepsilon(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{\psi}_k^+(v) + \tilde{\psi}_k^-(v)}{\sqrt{1 + \Re[z_k]}}, \quad (3.3.10)$$

donde

$$z_k = \frac{a_\varepsilon^- e^{i(\phi_\varepsilon^- - \chi_\varepsilon^+)} + a_\varepsilon^+ e^{-i(\phi_\varepsilon^+ - \chi_\varepsilon^-)}}{\|\psi_k^+\| \|\psi_k^-\|}. \quad (3.3.11)$$

Esta última contribución viene del producto escalar entre $\tilde{\psi}_k^+$ y $\tilde{\psi}_k^-$. Además, en el régimen $k \gg 1$ es del orden de $(a_\varepsilon^+)^{-1}$. Consecuentemente, puede ser despreciada para estados de interés físico, con k grande. Dentro de esta aproximación uno recupera el comportamiento \tilde{e}_k^ε mostrado en la Ec. (3.3.1).

El paso final para construir la base de autoestados es imponer que la autofunción $(e_k^\varepsilon|$ sea simétrica, lo que involucra extenderla al dominio $\mathcal{L}_\varepsilon \cup \mathcal{L}_{4-\varepsilon}$:

$$(e_k^\varepsilon| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon} \tilde{e}_k^\varepsilon(v) \langle v| + \sum_{v' \in \mathcal{L}_{4-\varepsilon}} \tilde{e}_k^\varepsilon(-v') \langle v'| \right]. \quad (3.3.12)$$

3.3.2. Estados físicos

En los análisis numéricos que se realizaron en las Refs. [24, 25], los estados físicos consistían en una familia biparamétrica de distribuciones gaussianas

$$\tilde{\Psi}(k) = \Psi_G(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{\sigma}} e^{-(k-k_0)^2/(4\sigma^2)}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.3.13)$$

Los parámetros k_0 y σ están relacionados con el valor esperado $\langle \hat{p}_\phi \rangle$ y la dispersión $\langle \Delta \hat{p}_\phi \rangle$ del momento del campo escalar

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \sqrt{12\pi G} \hbar k_0, \quad \frac{\langle \Delta \hat{p}_\phi \rangle}{\langle \hat{p}_\phi \rangle} = \frac{\sigma}{k_0}. \quad (3.3.14)$$

En principio, un perfil espectral gaussiano tiene soporte en toda la recta real, por lo que encuentra aplicación directa sólo en los casos en los que la base de autoestados cubre todo el conjunto $k \in \mathbb{R}$, como ocurre en la situación genérica, donde el espectro del operador $\hat{\Theta}$ está doblemente degenerado (en la práctica, esto conlleva que la construcción de la base descrita en la Sección 3.3.1 debe completarse introduciendo su complemento ortogonal). Pero en el resto de casos en los que el espectro del operador $\hat{\Theta}$ no es degenerado, los perfiles gaussianos no son los más naturales, debido a que habría que restringirlos a la semirrecta $k \in [0, \infty)$. Únicamente en aquellas circunstancias en las que el perfil está picado en un valor de k_0 mucho mayor que σ se puede proceder de forma aproximada con un verdadero perfil gaussiano.

Dado que estamos interesados en el estudio de estados físicos más generales, en los que los efectos de las diferencias entre prescripciones podrían amplificarse, dando lugar, en principio, a diferentes predicciones cuánticas, vamos a introducir otra familia de perfiles que resultan ser más convenientes y que están igual de bien adaptados tanto en presencia o ausencia de degeneración del espectro. En particular, la clase de estados que vamos a considerar son distribuciones normales logarítmicas del tipo

$$\Psi_L(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{\sigma k}} e^{-[\ln(k/k_0)]^2/(4\sigma^2)}, \quad (3.3.15)$$

con $k \in \mathbb{R}^+$. Los parámetros positivos k_0 y σ están relacionados con $\langle \hat{p}_\phi \rangle$ y $\Delta \hat{p}_\phi$ mediante

$$\langle \hat{p}_\phi \rangle = \sqrt{12\pi G} \hbar k_0 e^{\sigma^2/2}, \quad \frac{\langle \Delta \hat{p}_\phi \rangle}{\langle \hat{p}_\phi \rangle} = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}. \quad (3.3.16)$$

Esta familia biparamétrica de estados físicos es uno de nuestros puntos de partida para estudiar las discrepancias entre prescripciones en el régimen cuántico en el que $\langle \hat{p}_\phi \rangle$ y $\langle \Delta \hat{p}_\phi \rangle$ son del mismo orden.²

²Los estados semiclásicos que se estudiaron en [25] estaban sujetos a la condición $\langle \hat{p}_\phi \rangle \gg \langle \Delta \hat{p}_\phi \rangle$.

La función de ondas $\Psi(v, \phi)$ que corresponde a un perfil dado $\tilde{\Psi}(k)$ puede ser evaluada directamente computando la integral (1.2.34). Desde un punto de vista numérico, obviamente, debemos primero discretizar la integral y restringirla a un dominio compacto \mathbb{D} en k . Para los propósitos que tenemos en mente, es suficiente elegir \mathbb{D} como

$$\mathbb{D} = [k_0 e^{-s\sigma}, k_0 e^{s\sigma}], \quad \text{con } s \in \mathbb{N}^+. \quad (3.3.17)$$

En tanto tengamos $s > 7$, es posible ver que el error relativo en la integración debido a la contribución despreciada $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{D}$ es menor que 10^{-12} . En las simulaciones que hemos realizado para esta tesis, hemos elegido $s = 10$.

Para la integración numérica de la Ec. (1.2.34) en \mathbb{D} , hemos utilizado el método de *Romberg* (consúltese, por ejemplo, la Ref. [97]). Este método es especialmente conveniente si la discretización de la integral (número de intervalos en que se divide la misma para su cómputo numérico) está fuertemente restringida, como ocurre en este caso, debido a que cada intervalo lleva asociado una autofunción que es justamente el elemento de nuestro algoritmo que más recursos numéricos consume. La idea general subyacente en el método de Romberg es realizar sucesivas estimaciones de la integral, de manera que en cada estimación se refina la discretización de la integral en un factor 2. Utilizando el conjunto de estimaciones, se puede hacer una extrapolación utilizando el algoritmo de Neville para dar una estimación del valor final de la integral en el límite continuo de la discretización. Para controlar la precisión en la integración, requerimos que la diferencia entre dos integraciones de orden l y $l+1$ en la extrapolación polinómica satisfagan

$$\|\Psi_\phi^{(l+1)} - \Psi_\phi^{(l)}\|_{\text{phy}} < \delta \|\Psi_\phi^{(l+1)}\|_{\text{phy}}, \quad (3.3.18)$$

donde la cota δ varía entre 10^{-6} y 10^{-10} , dependiendo de la simulación, y es el parámetro que controla el error de la integración. Para evitar un coste excesivo en el tiempo de computación, hemos restringido el número máximo de intervalos en la discretización de la integral a 2^{12} .

3.3.3. Valores esperados

Vamos a calcular los valores esperados y dispersiones de observables sobre los estados representados por las funciones de onda construidas en la sección previa. Consideraremos dos tipos de observables: los que introducimos en la Sección 3.2.2 y que codifican información de interés en cosmología, como son $\ln|\hat{v}|_\phi$, \hat{H}_ϕ y $\hat{\rho}_\phi$, y los observables definidos en la Sección 3.2.1, que están contruidos para detectar diferencias entre el orden de factores de las prescripciones estudiadas en esta tesis.

La información dinámica se extrae adoptando la imagen de Schrödinger, donde la evolución de un estado es vista como una transformación unitaria definida por (1.2.35)

desde los datos iniciales a un tiempo ϕ_0 dado hasta la función de onda a un tiempo posterior ϕ . En esta imagen, la acción de un observable físico se obtiene de su contrapartida cinemática en una sección inicial de tiempo adecuada (véase la Sección 3.2.2).

Este método fue inicialmente empleado en los estudios numéricos que se llevaron a cabo en la Ref. [25]. En nuestro caso, y en la representación de volumen v , todos los operadores geométricos de interés o bien actúan por multiplicación o son combinaciones de operadores de ese tipo por otros que producen desplazamientos en la etiqueta v . Por ello será sencillo evaluar la acción de los operadores $\ln|\hat{v}|_\phi$, \hat{H}_ϕ , $\hat{\rho}_\phi$ y $\widehat{\Delta\Theta}$ sobre los estados $\Psi(v, \phi)$.

Los valores esperados se evaluarán por medio del producto interno

$$\langle \Psi_\phi | \Phi_\phi \rangle = \sum_{v \in \mathcal{L}_\epsilon \cap J} \bar{\Psi}_\phi(v) \Phi_\phi(v) . \quad (3.3.19)$$

Debido a las limitaciones que introduce el cómputo numérico, restringimos la suma a una región compacta $J = [-v_{m'}, v_{m'}]$, en el caso en que hay degeneración, y en caso contrario $J = [0, v_{m'}]$ (situaciones excepcionales). En nuestras simulaciones hemos elegido la cota $v_{m'}$ dentro del intervalo $[10^4, 4 \cdot 10^6]$, y de forma diferente dependiendo de la simulación específica. Esta elección asegura que el error introducido por la truncación sea siempre de segundo orden en comparación con los errores que emergen en otros subprocesos de nuestro algoritmo numérico.

Para mantener bajo control la principal fuente de error, que proviene de la evaluación de la base de autofunciones y de la integración de la función de onda Ψ en cada sección de tiempo, hemos introducido un filtro para $\Psi_\phi(v)$ dentro del producto interno (3.3.19) de tal modo que si

$$|\Psi_\phi(v)| < \alpha \sup |\Psi_\phi|, \quad (3.3.20)$$

el valor de $\Psi_\phi(v)$ se hace idénticamente cero. Esto previene que este tipo de error pueda alcanzar niveles inadmisibles a la hora de computar los valores esperados (y dispersiones). En las simulaciones que hemos realizado elegimos la cota relativa de modo que $\alpha \in [10^{-6}, 10^{-8}]$.

En cuanto a las dispersiones, hemos utilizado la expresión estándar

$$\langle \Delta \hat{O} \rangle^2 = \langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2 \quad (3.3.21)$$

para cada observable \hat{O} .

3.3.4. Eficiencia numérica

Analizaremos ahora los algoritmos numéricos que introdujimos en las secciones previas centrándonos en su precisión y eficiencia numérica. Las computaciones numéricas

que se necesitan para llegar a los resultados que se exponen en esta tesis son varias: (i) evaluación de los elementos de la base (e_k^ε), que fueron discutidos ampliamente en la Sección 3.3.1, (ii) integración de los perfiles espectrales para determinar la función de onda para cada valor constante de ϕ (véase la Sección 3.3.2), y (iii) cómputo de la acción de los observables, sus valores esperados y dispersiones (véase la Sección 3.3.3). Cada uno de estos subprocesos introduce su propio error numérico, y además poseen una eficiencia distinta.

Vamos a comenzar con el primero de ellos: la evaluación de los elementos de la base. Las comparaciones durante las simulaciones han mostrado que éste es el proceso que conlleva mayor coste numérico y requiere más recursos. Por ello es la parte crítica desde un punto de vista de la eficiencia numérica. Como discutimos en la Sección 3.3.1, los propios algoritmos y el coste numérico dependen de la degeneración de la base, y por tanto varían según el sector de superselección en donde se están realizando los cálculos y la prescripción adoptada.

En una situación en que no hay degeneración (véase la Sección 3.3.1), el cálculo involucra dos pasos: la determinación de autofunciones ψ_k que en general no tienen la norma adecuada y la estimación de sus normas computando, a través de una extrapolación adecuada, su límite WDW. La precisión de este cálculo depende del tamaño del dominio de evaluación elegido para cada autofunción y del número de onda k [véase la Ec. (1.2.34)]. En particular, observamos que hay dos efectos que compiten entre sí: dado que las autofunciones se evalúan por medio de métodos iterativos, la precisión de la misma disminuye con el tamaño del dominio, mientras que la precisión para determinar su límite WDW aumenta con él. Respecto a ello, la elección del tamaño del dominio dado por la Ec. (3.3.2) proporciona un balance aceptable entre estas dos fuentes de error. También debemos recordar que gracias al convenio $e_k^\varepsilon(\varepsilon) > 0$, la ambigüedad debida a una fase compleja global para cada autofunción desaparece.

En los casos con degeneración vistos en la Sección 3.3.1, el algoritmo es considerablemente más complicado. En primer lugar, el procedimiento aplicado a casos no degenerados es solamente el preludeo en la evaluación de las autofunciones. Además, el error numérico introducido en este caso es aún mayor debido a que el dominio para el cómputo de ψ_k es ahora *dos veces* mayor, y por tanto la evaluación de las autofunciones requiere al menos el doble de iteraciones. Como consecuencia tenemos un aumento significativo del coste necesario para evaluar el *par* de autofunciones ψ_k^\pm y, además, ambas funciones ψ_k^\pm son ahora autofunciones de coeficientes *complejos*. En total, los tres aspectos que hemos comentado producen un incremento del coste computacional por un **factor 8** respecto al caso no degenerado.

Más aún, el siguiente paso, que es tomar la combinación lineal apropiada de las

autofunciones ψ^\pm para conseguir los elementos de la base deseados, tiene un coste intrínseco asociado (y que es lineal en el tamaño del dominio). A parte de esto, las autofunciones ψ^\pm sufren un cambio de fase global (3.3.8) que introduce complicaciones adicionales, ya que la propia fase sólo se puede determinar módulo π . La identificación de la misma no es trivial, y además uno puede comprobar que dicha fase es una función de k cuya contribución dominante es $k \ln |k|$. Consecuentemente, este paso (ineludible) introduce error numérico adicional.

La integración de la función de onda, más específicamente la de los perfiles espectrales junto con las autofunciones [paso (ii) de arriba], involucra el método de Romberg, que nos permite restringir el cómputo a un número manejable de elementos de la base que hay que evaluar, mientras conservamos una alta precisión numérica. Este método, junto con una elección adecuada del dominio de integración, introduce un error que estará muy por debajo del error introducido en el paso (i) anterior. Además, utilizamos el mismo algoritmo tanto para los sectores de superselección excepcionales como para los genéricos. Pero desde un punto de vista de eficiencia, en presencia de degeneración se necesitan aproximadamente **3 veces** más recursos numéricos, debido principalmente a dos razones: (a) las autofunciones $e_k^\varepsilon(v)$ son complejas en este caso, y (b) la función de onda tiene que ser calculada en un dominio dos veces mayor que en los casos excepcionales.

Los efectos y dependencia del error numérico total introducido en los pasos anteriores (i) y (ii) se pueden observar en la Figura 3.1. Para los estados estudiados en esta tesis el error permanece a un nivel 10^{-12} en las situaciones excepcionales. Las complicaciones añadidas que implican los casos degenerados producen un error de 2 a 3 órdenes de magnitud mayor en comparación. Sin embargo, todos los perfiles de las funciones de onda pueden ser integrados con un error relativo que no excede la cota de 10^{-8} .

El paso final (iii) de nuestra computación numérica involucra algoritmos que no son comunes tanto para el caso no degenerado como en una situación de degeneración. Dado que el error numérico es mayor en los casos genéricos, visible en la Figura 3.1, no hemos tenido otro remedio que aumentar convenientemente la cota relativa α asociada al filtro (véase la Sección 3.3.3). Esto hace que el error relativo en el cómputo de valores esperados y dispersiones se vea afectado de una manera similar.

3.4. Discusión de los resultados

Hemos aplicado los métodos explicados en la sección anterior para llevar a cabo un análisis numérico por medio de una familia de estados que corresponden a distribu-

ciones normales logarítmicas (3.3.13), dentro del rango determinado por los siguientes intervalos de valores esperados y dispersiones relativas

$$30\hbar \leq \langle \hat{p}_\phi \rangle \leq 500\hbar, \quad 0.05 \leq \frac{\langle \Delta \hat{p}_\phi \rangle}{\langle \hat{p}_\phi \rangle} \leq 0.25 . \quad (3.4.1)$$

El análisis de estos estados ha sido realizado dentro de cada una de las cuatro prescripciones que hemos considerado en este capítulo. Además, hemos tomado 2^5 valores diferentes del parámetro ε , lo que nos ha permitido estudiar un número suficiente de sectores de superselección. Los resultados de nuestro estudio se resumen en las Figs. 3.1-3.6. Existen diferentes niveles de comparación en los que se pueden distinguir numerosos aspectos.

En primer lugar, puede realizarse una comparación preliminar a partir de la función de onda. Centrémonos en la amplitud de probabilidad –el valor $|\Psi(v, \phi)|$ escalado por la raíz cuadrada de la medida del producto interno en \mathcal{H}_{gr} – para la función de onda que representa el mismo estado físico en las diferentes prescripciones [en otras palabras, el perfil espectral $\tilde{\Psi}(k)$]. Lejos del rebote [véase la Figura 3.1(b)], no se observan diferencias significativas. Sin embargo, la situación se vuelve más complicada cuando se produce el rebote [Figura 3.1(a)]. En general, la forma de la función de onda en ambos casos tiene similitudes, como, por ejemplo, la posición del pico principal o la manera en que decae hacia $v \rightarrow \infty$. En cambio, se pueden observar propiedades que en realidad revelan la existencia de diferencias sustanciales, y que resultan de la interacción entre las ramas en contracción y expansión, presentes en el patrón de interferencia que se observa en la Figura 3.1(a) en el lado de la función de onda que decae hacia v grande. Allí aparece una dependencia clara en la prescripción, ya que los máximos y mínimos en cada caso están desplazados unos de otros. No obstante, el desplazamiento específico de esos extremos locales no sólo depende de la prescripción, si no también del estado concreto que se esté estudiando y del sector de superselección que se considera. En consecuencia, no es posible utilizar (o al menos no es obvio cómo) dicha diferencia de una manera sistemática para identificar prescripciones

Otro de los aspectos físicos relevantes en nuestra comparación es la que se deduce al incluir los observables cosmológicos $\ln|\hat{v}|_\phi$, \hat{H}_ϕ y \hat{p}_ϕ . Los resultados se encuentran en las Figuras 3.2-3.5. Analizando el mismo estado en diferentes prescripciones hemos sido capaces de detectar diferencias entre los valores esperados de los tres observables [Figuras 3.3, 3.4 y 3.5]. Estas diferencias se acentúan en el rebote, y decaen rápidamente cuando la función de onda alcanza el régimen de baja densidad de energía. Sin embargo, para los estados analizados en este trabajo y que están dentro del rango mencionado en la Ec. (3.4.1), las diferencias entre valores esperados de diferentes prescripciones están varios órdenes de magnitud por debajo de las dispersiones correspondientes a lo largo

de toda la evolución. Estas diferencias dependen de la degeneración del operador $\hat{\Theta}$, de la definición de los propios observables y del estado que se esté considerando.

La situación en la que se observan mayores diferencias es cuando se comparan los valores esperados del operador densidad de energía en estados con un valor del momento $\langle \hat{p}_\phi \rangle$ bajo. En este caso, las diferencias están uno o dos órdenes de magnitud por debajo de las dispersiones durante toda la evolución. En el resto de casos, las diferencias son incluso menores cuando se comparan con las dispersiones.

De entre los resultados presentados anteriormente, el caso de la densidad de energía $\hat{\rho}_\phi$ merece especial atención. Para todas las prescripciones, el espectro esencial de este operador es el intervalo $[0, \rho_c]$ donde $\rho_c \approx 0.41\rho_{\text{Pl}}$ es la densidad de energía crítica (véase la Sección 3.1.2). Este hecho se refleja en el comportamiento de $\langle \Delta \hat{\rho}_\phi \rangle$. Es decir, para los estados analizados aquí y para los casos no degenerados (Sección 3.3.1), el valor esperado $\langle \hat{\rho}_\phi \rangle$ alcanza la densidad de energía crítica ρ_c en el rebote, y su dispersión disminuye significativamente allí (y llega incluso a ser nula salvo error numérico para estados picados en valores grandes de $\langle \hat{p}_\phi \rangle$). En este sentido, los estados con un perfil espectral de la forma (3.3.15) son estados coherentes. En el caso en el que el espectro del operador evolución está degenerado, la situación es diferente: podemos observar que $\langle \Delta \hat{\rho}_\phi \rangle$ decrece cerca del rebote, pero alcanza un valor mínimo positivo significativamente mayor que en ausencia de degeneración. Esta propiedad distingue claramente las prescripciones APS y sLQC de las prescripciones MMO y sMMO, al menos para los sectores de superselección $\varepsilon \neq 2, 4$. Aunque, por otro lado, dicha diferencia podría emerger de la construcción de la base en el caso degenerado.

Otro aspecto físico considerado en nuestros análisis numéricos se refiere a los valores esperados de los observables $(\widehat{\Delta \Theta_{AB}})^2$, contruidos especialmente para detectar discrepancias entre diferentes prescripciones. Los resultados se resumen en la Figura 3.6. Como podemos ver, los valores esperados no son nulos. Esto pone claramente en evidencia que las prescripciones son *diferentes*, y que las diferencias entre ellas son cuantificables. Hemos comprobado que las diferencias más claras se observan cerca del rebote, y decaen exponencialmente lejos de él. Esto se puede deducir analíticamente a través del hecho de que el potencial (3.2.3) de cada prescripción (caracterizado por α) se hace máximo justamente en el rebote. Un ejemplo de este fenómeno está presente en la Figura 3.6(a). En el caso de las prescripciones sLQC y sMMO [Figura 3.6(b)], la diferencia es muchos órdenes de magnitud menor (más de 16 en el caso mostrado en esta tesis), debido a que el potencial que caracteriza (en parte) a cada prescripción es el mismo, y la única diferencia entre ellas es un operador compacto, que tiene soporte en 3 puntos de la red alrededor de $v = 0$.

3.5. Conclusiones

En este capítulo hemos visto cómo las ambigüedades que aparecen a la hora de promover un sistema clásico a su contrapartida cuántica, como ocurre con la especificación de la ligadura hamiltoniana, pueden proporcionar diferentes visiones físicas del mismo modelo. En particular, nosotros hemos estudiado diferentes prescripciones propuestas a lo largo de la literatura en cosmología cuántica de lazos, que son: la prescripción APS inicialmente introducida en las Refs. [23, 24] adoptando la dinámica mejorada [25], su versión simplificada sLQC [26], y la prescripción MMO [44]. Además de estas prescripciones, hemos incluido la que se podría entender como la versión simplificada de MMO, la prescripción sMMO [17, 58], que combina las propiedades buenas tanto de sLQC como de MMO.

Esencialmente, diferentes prescripciones dan lugar a pequeñas diferencias al construir el operador $\hat{\Theta}$, generador de la dinámica en el tiempo interno ϕ . En particular, la estructura matemática del espacio de Hilbert físico es diferente según la prescripción que se tenga en cuenta. En realidad, para sectores de superselección genéricos de las prescripciones APS y sLQC, la estructura adquiere mayor complejidad debido a que el espectro de $\hat{\Theta}$ está doblemente degenerado, mientras que en las prescripciones MMO y sMMO el operador tiene un espectro sin degeneración, proporcionando una estructura más simple. Este hecho influye sustancialmente en la eficiencia de las técnicas numéricas empleadas en el estudio de la dinámica del sistema, que varía considerablemente del primer par de prescripciones al segundo. Como se discutió en la Sección 3.3, la construcción y el posterior análisis de los estados físicos en los casos con degeneración requiere métodos más complicados, lo que incrementa el coste computacional y el error numérico. Afortunadamente, este error está lejos de ser crítico en las simulaciones que hemos realizado, ya que, en esos casos con degeneración, el error relativo está en torno a 10^{-9} , frente a 10^{-12} para los sectores sin degeneración. En relación al consumo de tiempo, en la Sección 3.3.1 vimos que el proceso responsable de la mayor parte del consumo de los recursos numéricos es la construcción de la base, cuya comparación entre ambas situaciones (ausencia o no de degeneración) era de al menos *un factor 8* en favor de las prescripciones MMO y sMMO frente a APS y sLQC. Desde el punto de vista numérico son pues las situaciones excepcionales (casos sin degeneración) las que proporcionan una mayor eficiencia. Esto puede ser crucial a la hora de estudiar sistemas cosmológicos más complejos, como por ejemplo cosmologías anisótropas de tipo Bianchi.

Hemos visto cuáles son las ventajas técnicas que presenta cada prescripción, pero un propósito principal de este estudio es la búsqueda y detección de posibles diferencias a un nivel físico entre las prescripciones consideradas. Para eso, hemos analizado una

familia biparamétrica de estados físicos con un perfil espectral de distribución normal logarítmica [véase la Ec. (3.3.15)], sin restringirnos a estados semiclásicos. Nos hemos concentrado en estados que proporcionan valores del momento del campo escalar bajos: $\langle \hat{p}_\phi \rangle < 500\hbar$, puesto que en este régimen es más sencillo desvelar las posibles diferencias que puedan existir. Para estos estados, hemos sido capaces de detectar diferencias entre varias prescripciones tan sólo observando el patrón de interferencia en la cola del paquete de onda en el instante en que se produce el rebote cuántico. Para los mismos perfiles espectrales, las funciones de onda construidas con diferentes prescripciones muestran una clara diferencia en tanto en cuanto los patrones de interferencia se ven desplazados relativamente, confirmándose en una primera instancia que existen discrepancias entre las prescripciones. Sin embargo, esto no permite deducir directamente qué prescripción específica ha sido empleada, dado que el desplazamiento comentado es dependiente de otros factores, como del sector de superselección en el que se ha construido el estado y del propio perfil espectral del estado.

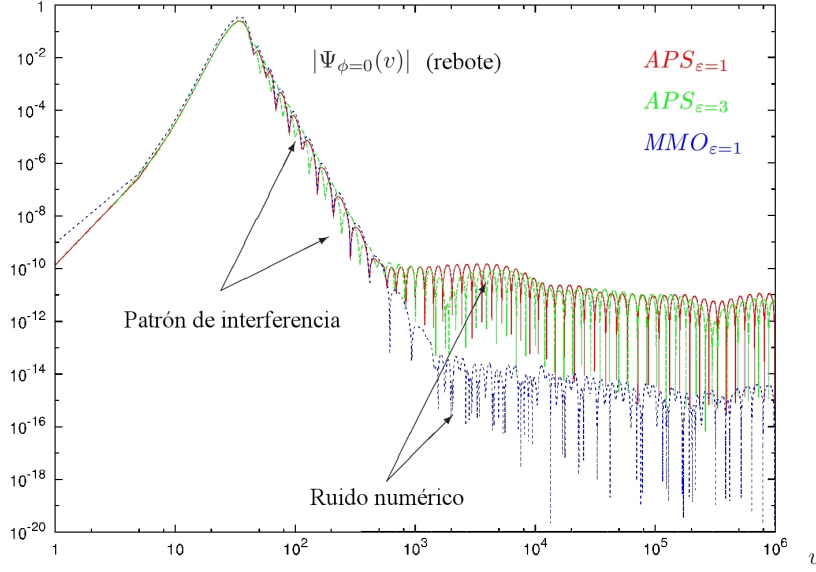
Para atacar el problema de una forma sistemática, hemos abierto dos frentes. Por un lado, hemos estudiado los valores esperados y dispersiones de ciertos observables de interés en cosmología. Por otro lado, hemos introducido ciertos operadores cuánticos que presentan una elevada sensibilidad frente a un cambio de prescripción.

En relación con el primero de los casos, hemos elegido tres observables comúnmente utilizados en cosmología, que son el logaritmo del volumen, el parámetro de Hubble y la densidad de energía del contenido material (campo escalar). Hemos comparado las trayectorias cuánticas de estos operadores para la familia de estados especificada. Hemos computado las diferencias de los valores esperados de cada prescripción, y hemos visto que dichas diferencias están varios órdenes de magnitud por debajo de sus respectivas dispersiones. Hemos deducido por tanto que, aunque las diferencias están presentes, son difícilmente detectables dado que están enmascaradas por la incertidumbre intrínseca del modelo cuántico.

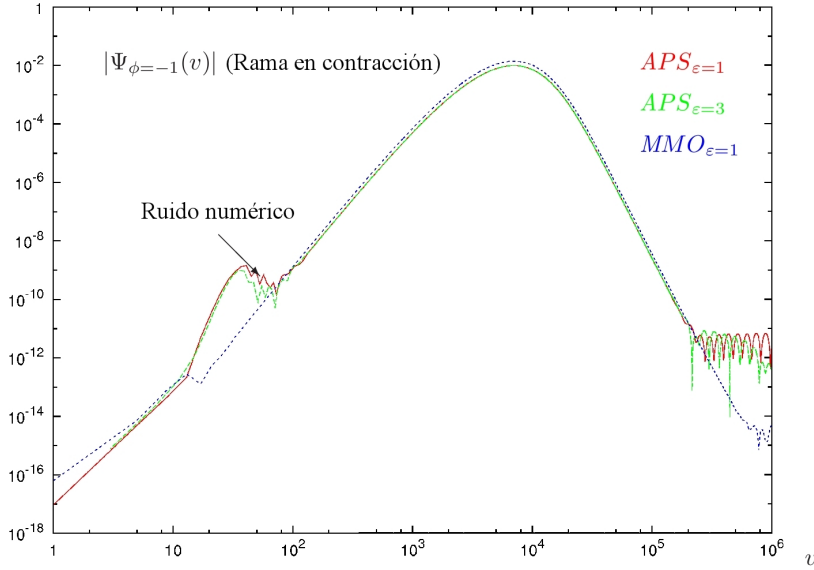
Para el otro tipo de observables que han sido considerados, hemos computado los valores esperados de los operadores $(\widehat{\Delta\Theta}_{AB})^2$ definidos en la Ec. (3.2.5), que esencialmente codifican las diferencias entre las ligaduras hamiltonianas correspondientes a diferentes prescripciones. Estos valores esperados no son nulos, alcanzando un máximo en el momento del rebote y decayendo exponencialmente lejos de él. Hemos sido capaces de entender la naturaleza de estas diferencias físicas entre prescripciones (véase la Sección 3.2.1), que son producidas principalmente por las discrepancias en el potencial que caracteriza al operador $\hat{\Theta}$ en cada caso. Pero también sabemos que existen contribuciones a órdenes más bajos, lo que explica las pequeñas diferencias entre las prescripciones sLQC y sMMO.

Podemos concluir que existen distinciones no triviales que hacen a cada prescripción verdaderamente diferente. Este hecho, junto con las ventajas mostradas por algunas de las prescripciones frente a otras, por ejemplo en simplicidad de las descripciones analíticas y en eficiencia numérica, señala que, al explotar la ambigüedad existente a la hora de promover el sistema clásico a cuántico, podemos optimizar el análisis del modelo en sí. Como veremos en el Capítulo 7, gracias a esta ambigüedad vamos a alcanzar un nivel resolutivo satisfactorio para un universo inflacionario, incluso en presencia de inhomogeneidades.

Pero, antes de sumergirnos por completo en ese tipo de modelos, debemos detallar el programa de cuantización que vamos a seguir si queremos incluir inhomogeneidades en nuestro sistema. Dado que se trata de campos (sistemas con infinitos grados de libertad), su descripción a nivel cuántico, incluso utilizando técnicas estándar, no es ni mucho menos trivial y es un problema abierto en física moderna. Todo esto lo estudiaremos detalladamente en la siguiente parte de esta tesis.

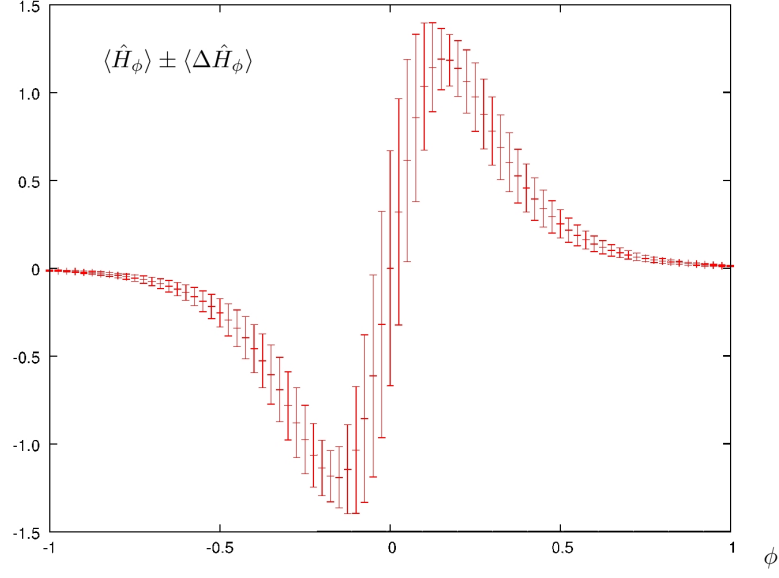


(a)

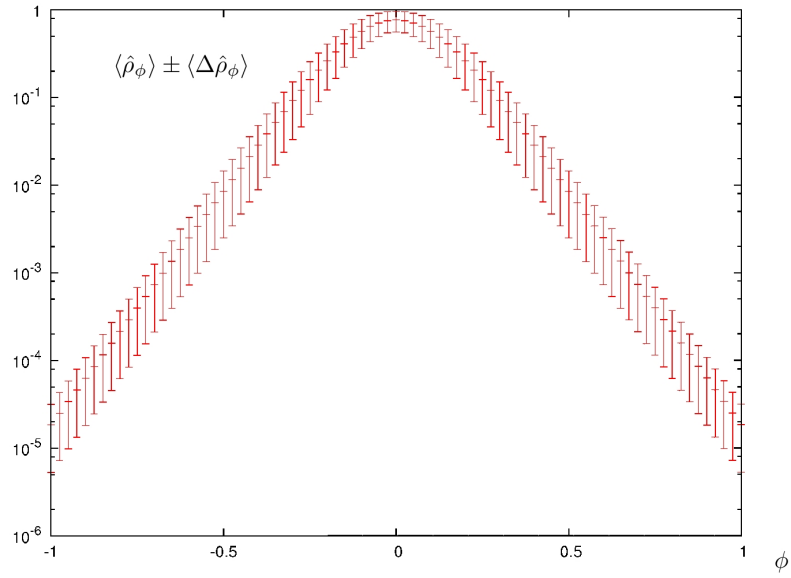


(b)

Figura 3.1: Amplitud $|\Psi_\phi(v)|$ de una función de onda correspondiente a un estado físico del tipo distribución normal logarítmica. Se ha incluido la amplitud para diferentes prescripciones tanto en el momento del rebote (a) como lejos de él (b). Los parámetros del perfil $\tilde{\Psi}$ de este estado están fijados por las condiciones $\langle \hat{p}_\phi \rangle = 100\hbar$ y $\langle \Delta \hat{p}_\phi \rangle / \langle \hat{p}_\phi \rangle = 0.1$. Lejos del rebote, las amplitudes son indistinguibles salvo por su error numérico, mientras que, cuando se alcanza el rebote, surgen las diferencias en el patrón de interferencia (las oscilaciones amortiguadas aparecen desfasadas). El nivel del ruido depende de las técnicas usadas, que son diferentes dependiendo de si el espectro de $\hat{\Theta}$ es degenerado o no.

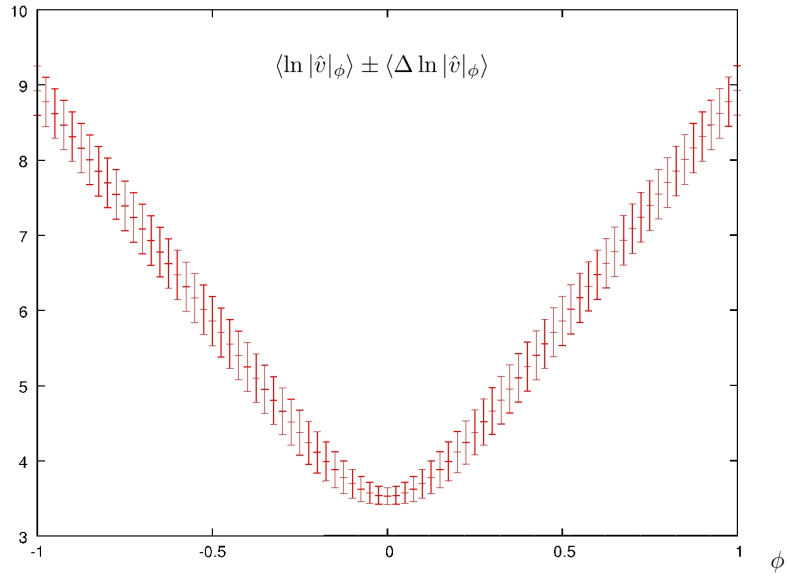


(a)

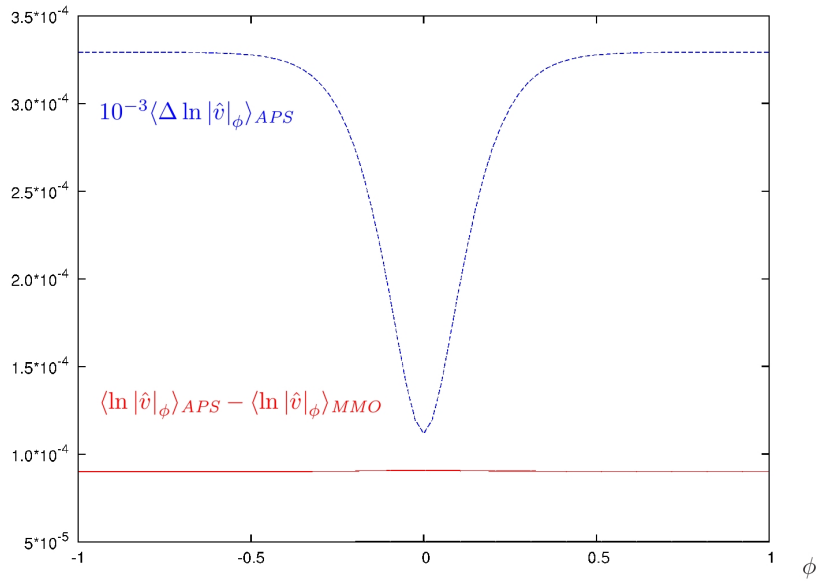


(b)

Figura 3.2: Trayectorias dinámicas de \hat{H}_ϕ (a) y $\hat{\rho}_\phi$ (b), dadas por los valores esperados de estos observables sobre el estado de la Figura 3.1 con $\varepsilon = 1$ en la prescripción APS.



(a)



(b)

Figura 3.3: (a) Trayectoria cuántica de $\ln |\hat{v}|_\phi$ para el mismo estado y la misma prescripción que en la Figura 3.2. (b) Incertidumbre en $\ln |\hat{v}|_\phi$ para el mismo estado y prescripción, comparada con la diferencia entre los valores esperados correspondientes calculados en las prescripciones APS y MMO.

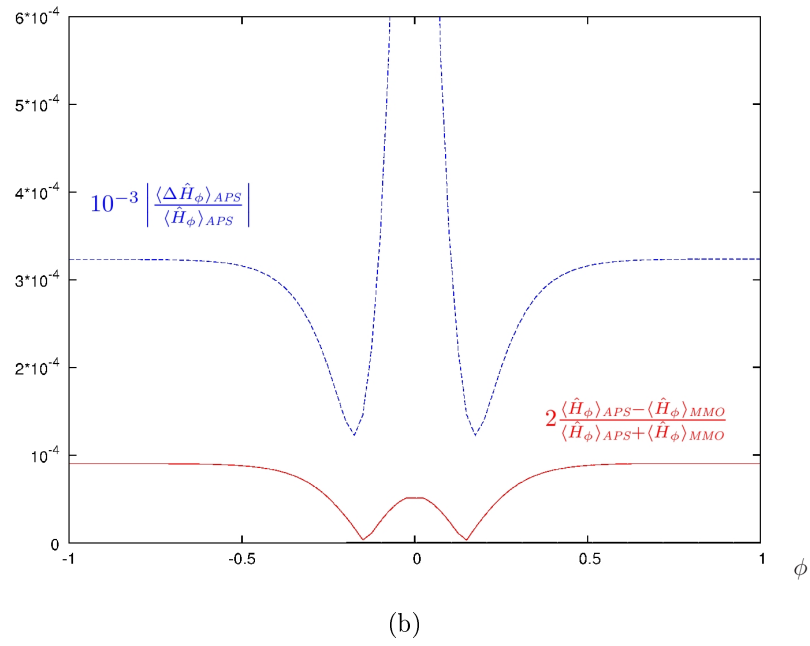
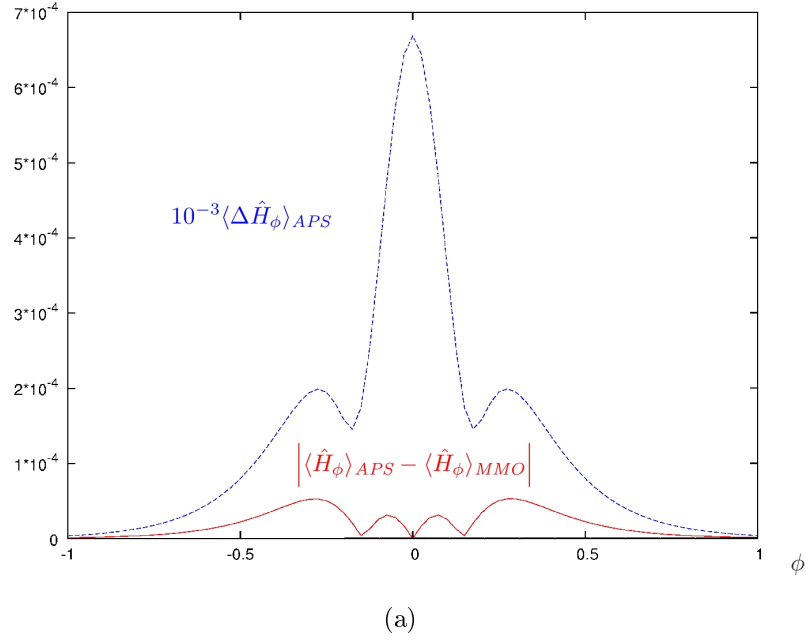
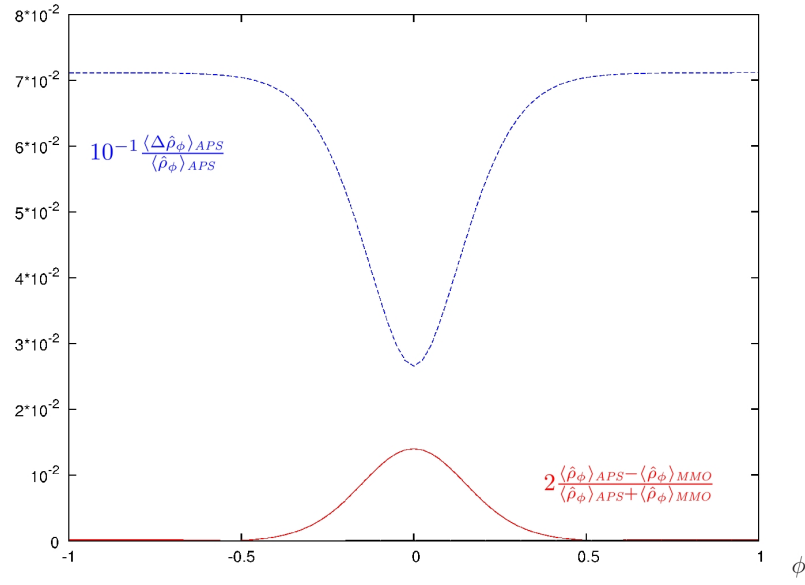
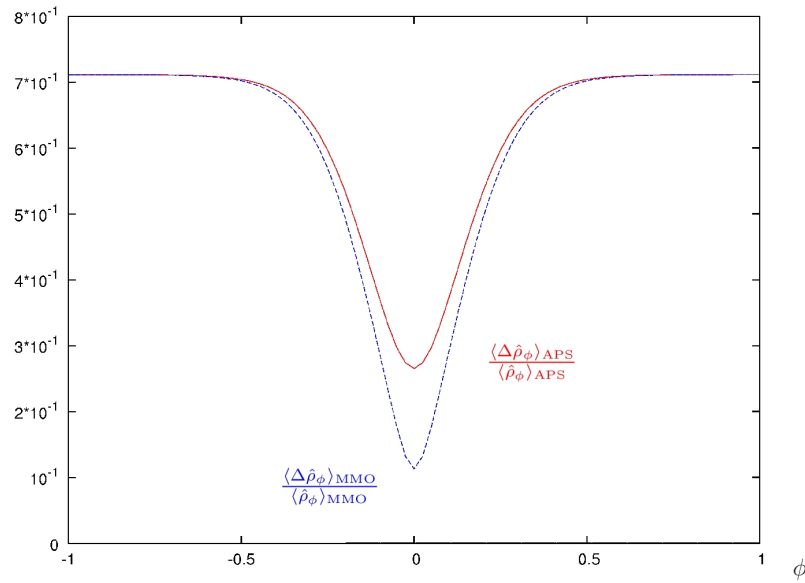


Figura 3.4: Dispersiones absolutas (a) y relativas (b) de \hat{H}_ϕ para el estado considerado en la Figura 3.1, comparadas con las diferencias correspondientes entre los valores esperados de \hat{H}_ϕ en las prescripciones APS y MMO. Para cada valor relativo, se puede observar un pico en el momento del rebote ($\phi = 0$) debido a que $\langle \hat{H}_\phi \rangle$ se anula; sin embargo, el pico en el caso de las diferencias es muy abrupto y sobrepasa la resolución numérica del eje ϕ , por lo que no aparece.

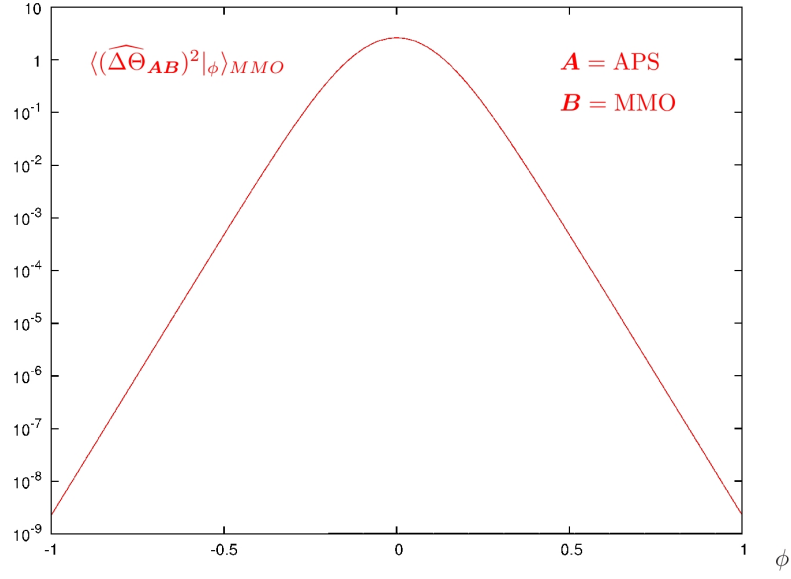


(a)

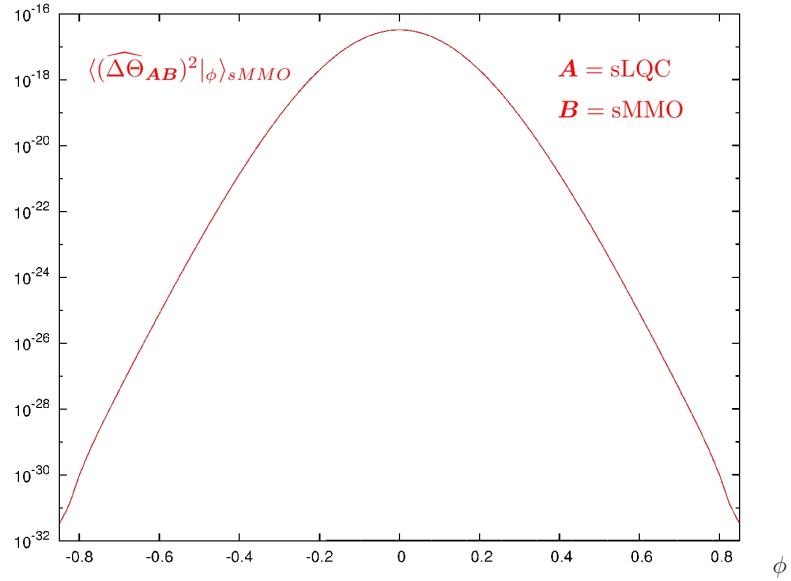


(b)

Figura 3.5: (a) Dispersión relativa de $\hat{\rho}_\phi$ para el mismo estado que en las figuras previas, comparada con las diferencias relativas entre los valores esperados correspondientes en las prescripciones APS y MMO. (b) Comparación entre las dispersiones relativas de $\hat{\rho}_\phi$ en las prescripciones APS y MMO para un sector de superselección genérico. Se observa que en el caso de la prescripción MMO la coherencia es cualitativamente mayor.



(a)



(b)

Figura 3.6: Los valores esperados del observable $\langle (\widehat{\Delta\Theta_{AB}})^2 | \phi \rangle$ para: (a) $\mathbf{A} = \text{APS}$ y $\mathbf{B} = \text{MMO}$; (b) $\mathbf{A} = \text{sLQC}$ y $\mathbf{B} = \text{sMMO}$. En todos los casos hemos utilizado $\varepsilon = 1$, y el observable ha sido evaluado en un estado con una distribución normal logarítmica determinada por $\langle \hat{p}_\phi \rangle = 100\hbar$ y $\langle \Delta \hat{p}_\phi \rangle / \langle \hat{p}_\phi \rangle = 0.1$. El estado ha sido construido dentro de la prescripción MMO en el caso (a), y dentro de sMMO para el caso (b). La diferencia alcanza su máximo en el rebote, y decae exponencialmente lejos de él. Además, la diferencia entre las prescripciones de sLQC y sMMO es varios órdenes de magnitud más pequeña que la diferencia de cualquier otro par de prescripciones.

Resultados de unicidad

Introducción y motivación

Para añadir inhomogeneidades a nuestro sistema y tratar con magnitudes físicas que varían de punto a punto, tenemos que recurrir a métodos de teoría de campos. Un campo contiene infinitos grados de libertad, lo que representa un salto cualitativo en comparación con aquellos sistemas descritos por un número finito de los mismos, por muy grande que sea su número [98]. Además, a nosotros nos interesan los fenómenos cuánticos que puedan surgir por la presencia de campos cuando se propagan en escenarios cosmológicos, pero teniendo siempre presente que, para su descripción, no poseemos aún una teoría cuántica completa de la gravedad [1–3], por lo que no vamos a abordar una cuantización definitiva dentro del marco de una teoría de esas características. La situación que nos resulta de interés es aquella en la que, tanto los fenómenos cuánticos asociados a los campos (lineales), como los efectos asociados a la curvatura del espaciotiempo, son ambos relevantes y deben ser tenidos en cuenta. Existen situaciones de este tipo ampliamente estudiadas en la comunidad científica, como es el caso de la radiación de Hawking [99], el efecto Unruh [100] o la teoría de perturbaciones cosmológicas [36, 37, 101]. En este tipo de tratamiento, se asume una descripción cuántica estándar de tipo Fock para los campos, mientras que los efectos debidos al campo gravitatorio son descritos por una teoría (efectiva o no) clásica [28]. Este marco, comúnmente conocido con el nombre de teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos, será el campo de estudio de los dos próximos capítulos.

Antes de pasar a los detalles de la investigación que ha dado lugar a parte de esta tesis, es conveniente revisar algunos resultados referentes a la cuantización de campos lineales. Como hemos dicho, existe una diferencia insalvable entre un sistema con un número finito de grados de libertad y aquél descrito por campos. A la hora de dar una descripción cuántica, si tratamos con sistemas que tienen un espacio de fases lineal, en el primer caso disponemos de una herramienta que dota a la teoría de una consistencia considerable: el teorema de Stone-von Neumann [76, 77]. Asumiendo que caracterizamos el sistema clásico mediante el álgebra de Weyl [102] correspondiente a sus variables de posición y momento (exponenciadas convenientemente y dotadas de la operación proporcionada por los corchetes de Poisson), el procedimiento para cuan-

tizarlo consiste en buscar una representación del álgebra mediante operadores lineales sobre un espacio de Hilbert. El teorema de Stone-von Neumann [103] nos garantiza que todas las representaciones existentes que sean irreducibles, unitarias y *fuertemente continuas* son en realidad unitariamente equivalentes entre sí, por lo que la descripción cuántica que proporcionan es la misma desde el punto de vista físico. En el caso de una teoría cuántica de campos, la situación es mucho más fascinante, debido a que el espacio de fases asociado tiene dimensión infinita, por lo que el teorema anterior deja de aplicarse [28]. Surge entonces una tremenda ambigüedad en la cuantización, porque se dispone de infinitas representaciones cuánticas no equivalentes, incluso restringiendo la atención a cuantizaciones sobre espacios de Fock [104]. En estos casos, la estrategia consiste en incorporar las simetrías clásicas de una forma adecuada en la teoría cuántica, con objeto no sólo de darles un papel relevante en la física cuántica del sistema, sino de conseguir además que estas simetrías seleccionen una clase privilegiada de representaciones de entre todas las disponibles. Existen muchas situaciones de este tipo, como por ejemplo cuando se trata con campos que se propagan en un espaciotiempo de Minkowski, invariante bajo las transformaciones del grupo de Poincaré. Dado que esta simetría desempeña un papel fundamental en tales circunstancias, es natural exigir que la descripción física que hagamos (cuántica o no) la respete. Más que un inconveniente, este requerimiento se presenta como una ventaja, ya que la forma habitual de implementarlo, exigiendo que el estado de vacío de la teoría sea invariante bajo la acción de dicho grupo (adaptado a la dinámica del sistema) escoge una única familia de representaciones de Fock, todas ellas unitariamente equivalentes entre sí.

Otro ejemplo bien estudiado es el caso de campos que se propagan en un espaciotiempo de tipo de Sitter [105], y que tiene asociado el grupo de simetrías $O(1,4)$ (o grupo de de Sitter). De nuevo, para el tipo de campos usualmente considerados, es posible probar [106] que sólo existe una representación de Fock (salvo equivalencia unitaria) que posee un vacío invariante bajo dicho grupo (también conocido como vacío de Bunch-Davies [107]). Estudios posteriores alternativos [108] aseguran además la existencia de una solución invariante gaussiana a una ecuación de Schrödinger regularizada para este tipo de espaciotiempos. Otra situación de interés en situaciones con menos simetría es el caso de campos en un espaciotiempo estacionario por lo demás genérico [109–111], en los que la presencia de un vector de Killing temporal, junto con ciertas consideraciones respecto a la energía que permite definir, sirven para seleccionar una cuantización de tipo Fock privilegiada.

Aunque todos estos resultados son de especial importancia, su robustez se basa en la existencia de un alto grado de simetría en relación al espaciotiempo sobre el que se propagan los campos. En el caso de espaciotiempos cosmológicos homogéneos e isótropos, donde todavía hay presente una gran simetría, la pérdida de estacionariedad

(y por supuesto estaticidad) resulta en una insuficiencia para seleccionar un estado de vacío privilegiado si uno invoca únicamente las isometrías espaciales. Afortunadamente, estudios recientes sugieren que una posibilidad para solventar este problema es incluir de forma natural un conjunto de transformaciones presentes en el sistema: las correspondientes a su evolución dinámica.

Los primeros estudios en los que se propusieron los criterios de unicidad que vamos a analizar en esta tesis [31–35, 112–118] están basados en una propuesta para la cuantización de un espaciotiempo de Gowdy [29, 30] con la topología espacial de un tres-toro, T^3 . Se trata de espaciotiempos que incluyen dos vectores de Killing espaciales y donde las secciones espaciales son compactas. Gowdy demostró que, forzosamente, las secciones espaciales deben ser homeomorfas a un tres-toro, una tres-esfera (S^3) o una tres-asa ($S^1 \times S^2$). Este modelo consiste esencialmente en un universo de Bianchi [52, 119] con contenido de ondas gravitacionales. En el caso de ondas linealmente polarizadas, el modelo puede ser tratado en realidad como un campo escalar que se propaga en un espacio tiempo homogéneo, pero con soporte en secciones espaciales efectivas de menor dimensionalidad. En la Ref. [120] se consideró un modelo de Gowdy con secciones espaciales cuya topología era la de un tres-toro, junto con una cuantización de Fock específica del campo escalar, pero dicha cuantización resultó insatisfactoria debido a que la teoría no admitía una implementación unitaria de la dinámica [121, 122]. Las razones por las que no se podía alcanzar la unitariedad fueron estudiadas en la Ref. [116], de donde se dedujo que una transformación canónica adecuada en el sistema clásico permitía llegar a una descripción de campos que admitía una cuantización de Fock, ahora sí, con una dinámica unitariamente implementable [117, 118]. Más aún, el modelo mencionado incluye una ligadura global asociada a traslaciones en el círculo S^1 , que actúa como espacio efectivo para la propagación tras una reducción dimensional. Imponer cuánticamente la simetría conduce de manera natural a restringirse a cuantizaciones de Fock invariantes bajo la misma. Lo que resulta más interesante, si cabe, es que en la Ref. [31] se demostró que todas las cuantizaciones de Fock invariantes bajo las traslaciones en el círculo y que admiten una implementación unitaria de la dinámica son unitariamente equivalentes entre sí. Otros aspectos como la introducción de un operador de evolución o una formulación equivalente en la representación de Schrödinger fueron discutidos en las Refs. [123] y [124], respectivamente. Para el caso de topologías diferentes a las de un tres-toro, existen también resultados de unicidad para la cuantización [32, 125].

Estos resultados han sido el germen para obtener una generalización válida en situaciones de especial interés en cosmología. Por ejemplo, en la Ref. [33] se demostró que un campo escalar definido en el círculo y que satisface una ecuación de ondas sujeto a un potencial cuadrático dependiente del tiempo, pero por lo demás arbitrario (salvo

ciertas condiciones poco restrictivas), admite una familia de cuantizaciones de Fock unitariamente equivalentes que son invariantes bajo las traslaciones en el círculo y permiten una implementación unitaria de la dinámica. Estos resultados se extendieron en la Ref. [34] a una situación con aplicación directa en cosmología, en la que las secciones espaciales tienen la topología de una tres-esfera. La primera parte del Capítulo 4 está dedicada a una revisión de dichos resultados. Finalmente, como veremos en el Capítulo 5, en la Ref. [115] se consiguieron generalizar los criterios de unicidad (invariancia y unitariedad) al caso de topologías compactas arbitrarias.

Todos los resultados mencionados están sujetos a una elección de partida de cuáles son los campos canónicos que posteriormente se promueven a operadores cuánticos. Cuando uno compara las representaciones elegidas en [120] y [116], ambas están relacionadas por una transformación canónica dependiente del tiempo, que obviamente modifica la dinámica, y provoca una pérdida de unitariedad. Por ello, en la Ref. [35] se decidió estudiar si existían diferentes descripciones de campo que pudieran dar lugar a una cuantización de Fock inequivalente a la original, manteniendo el requisito de que fuera invariante bajo el grupo de traslaciones en S^1 y que admitiera una implementación unitaria de la dinámica. Con este fin, se introdujo una transformación canónica que consistía en un re-escalado del campo por una función dependiente del tiempo arbitraria (sujeta a condiciones muy poco restrictivas y muy razonables), el re-escalado inverso de su momento y una contribución adicional en éste que era lineal en el campo, y que iba multiplicada por otra función dependiente del tiempo. Fue posible probar que los criterios de unicidad no se pueden aplicar en ninguna nueva descripción de este tipo si el re-escalado del campo no es por una función constante, esencialmente porque la nueva dinámica no admite una implementación cuántica unitaria. Del mismo modo, como veremos en el Capítulo 4, estos resultados de unicidad relativos a redefiniciones de los campos canónicos por medio de transformaciones dependientes del tiempo se extendieron en las Refs. [113, 114] al caso de la topología de una tres-esfera. Se vio que la única posibilidad compatible con los criterios de unicidad es que la transformación canónica introducida sea independiente del tiempo. Finalmente, los resultados mencionados se han logrado generalizar a espaciotiempos con secciones espaciales de topología compacta arbitraria. Estos resultados serán objeto de análisis al final del Capítulo 5 de esta tesis.

Capítulo 4

Criterios de unicidad para la cuantización de campos en espaciotiempos no estacionarios

En este capítulo estudiaremos los criterios de unicidad para un campo escalar sujeto a un potencial cuadrático con una dependencia arbitraria del tiempo, que se propaga por un espaciotiempo estático con secciones espaciales isomorfas a tres-esferas. Más concretamente, el sistema clásico será descrito en la Sección 4.1, y en la Sección 4.2 daremos una posible descripción cuántica satisfactoria. En la Sección 4.3 repasaremos los criterios de unicidad, que permiten demostrar que cualquier cuantización de Fock invariante bajo las isometrías espaciales pertenece a una clase única de equivalencia unitaria si admite una implementación de la dinámica que respete la unitariedad. En la Sección 4.4 introduciremos una transformación canónica lineal dependiente del tiempo, que consistirá en un re-escalado del campo junto con una redefinición de su momento canónicamente conjugado, y probaremos que, a menos que dicha transformación sea constante, no se puede encontrar una representación invariante que admita una dinámica unitaria. Las principales conclusiones y aplicaciones de los resultados deducidos aparecen en la Sección 4.5.

4.1. Sistema clásico: campo escalar bajo un potencial dependiente del tiempo en la tres-esfera

Vamos a empezar nuestro estudio considerando un campo escalar ϕ que se propaga en un espaciotiempo globalmente hiperbólico (ya que admite una descomposición $3+1$

y una función global de tiempo t), estático y cuyas secciones espaciales son hipersferas (o tres-esferas) S^3 . Estas variedades espaciales están naturalmente equipadas con una métrica estática $\bar{\Omega}_{ab}$ que tiene la forma

$$\bar{\Omega}_{ab}dx^a dx^b = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\sigma^2, \quad (4.1.1)$$

donde x representa las coordenadas hipersféricas sobre la tres-esfera, $x = (\chi, \theta, \sigma)$, con $\chi, \theta \in (0, \pi]$ y $\sigma \in (0, 2\pi]$. Así pues, nuestro espaciotiempo tendrá una topología $\mathbb{I} \times S^3$, donde \mathbb{I} es cierto intervalo (conexo) de la recta real en el que está definida la coordenada temporal, $t \in \mathbb{I}$, y sobre el que no imponemos ninguna condición. La métrica espaciotemporal toma pues la forma

$$ds^2 = -dt^2 + \bar{\Omega}_{ab}dx^a dx^b. \quad (4.1.2)$$

Vamos a asumir que el campo escalar ϕ satisface una ecuación de ondas lineal sujeto a un potencial dependiente del tiempo de la forma $V(\phi) = s(t)\phi^2/2$, donde $s(t)$ es una función arbitraria con soporte en \mathbb{I} , y a la que exigiremos solamente ciertas propiedades muy generales más adelante. La ecuación de campo es pues

$$\ddot{\phi} - \Delta\phi + s(t)\phi = 0, \quad (4.1.3)$$

donde Δ es el operador de Laplace-Beltrami asociado a $\bar{\Omega}_{ab}$ y el punto significa derivación respecto del tiempo t . Admitiremos que el espacio de fases canónico Γ está formado por el espacio de datos iniciales $\{(\phi, P_\phi)\} = \{(\phi|_{t_0}, \sqrt{\bar{\Omega}}\dot{\phi}|_{t_0})\}$ para un tiempo fijo t_0 , y donde $\bar{\Omega} = \sin^2(\theta)\sin^4(\chi)$ es el determinante de la métrica espacial en la sección S^3 . Este espacio de fases está equipado con una estructura simpléctica independiente del tiempo dada por

$$\Omega[\delta_1, \delta_2] = \int_{S^3} d^3x (\delta_2\phi\delta_1 P_\phi - \delta_1\phi\delta_2 P_\phi), \quad (4.1.4)$$

donde δ_i (con $i = 1, 2$) representa un vector tangente a Γ . Los corchetes de Poisson están entonces dados por

$$\{\phi(x), P_\phi(x')\} = \delta(x - x'). \quad (4.1.5)$$

La función $\delta(x)$ es la delta de Dirac sobre S^3 .

En la formulación canónica, las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{P}_\phi = \sqrt{\bar{\Omega}}[\Delta\phi - s(t)\phi], \quad \dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\Omega}}}P_\phi, \quad (4.1.6)$$

que, combinadas adecuadamente, conducen a la Ec. (4.1.3).

Las secciones espaciales tienen asociadas un grupo natural de isometrías: el grupo $SO(4)$ (esto es, el grupo especial ortogonal de orden 4). Los elementos de este grupo

pueden entenderse como las rotaciones alrededor de un punto fijo en un espacio euclídeo en cuatro dimensiones. Claramente, la ecuación de ondas (4.1.3) que satisface ϕ es invariante bajo dicho grupo de rotaciones $SO(4)$, ya que la métrica y, consecuentemente, el operador Δ son invariantes bajo su acción. Por tanto, nuestra ecuación de movimiento posee un grupo de simetrías, que dejan invariante la dinámica del campo.

4.1.1. Descomposición en modos sobre la tres-esfera

Vamos a adoptar una descripción del campo en términos de su expansión en modos del operador Laplace-Beltrami, Δ . Dada la forma de la ecuación de campo, esta expansión nos permitirá eliminar la dependencia espacial de la misma, a cambio de descomponerla en una serie de ecuaciones de movimiento para infinitos grados de libertad que, no obstante, resultan desacoplarse. Es bien sabido que, en el espacio de funciones de cuadrado integrable con el elemento de volumen construido con $\bar{\Omega}$, el operador de Laplace-Beltrami tiene una base de autofunciones formada por los armónicos esféricos en S^3 (véase el Apéndice B), de manera que podemos expresar en términos suyos los campos definidos sobre la tres-esfera [38, 42, 126–128]. Cada armónico $Q_{n\ell m}(x)$ está etiquetado por tres números enteros, donde $n = 1, 2, \dots$ está relacionado con el autovalor del operador de Laplace-Beltrami cambiado de signo, $\omega_n^2 = n^2 - 1$, y donde $\ell = 0, \dots, n - 1$ y $m = -\ell, \dots, \ell$. El campo admite una descomposición de la forma

$$\phi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{n\ell m}(t) Q_{n\ell m}(x), \quad (4.1.7)$$

donde los coeficientes $A_{n\ell m}$ son funciones que sólo dependen del tiempo para cada valor del triplete (n, ℓ, m) .

Vamos a restringir nuestro estudio a campos escalares reales. Por ello, será conveniente reescribir la expansión (4.1.7) como

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} q_{n\ell 0} Q_{n\ell 0} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{\ell} q_{n\ell m} \Re[Q_{n\ell m}] + q_{n\ell -m} \Im[Q_{n\ell m}]. \quad (4.1.8)$$

Los coeficientes $q_{n\ell m} \in \mathbb{R}$. De ahora en adelante, utilizaremos la notación

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} q_{n\ell m} \tilde{Q}_{n\ell m}, \quad (4.1.9)$$

donde $\tilde{Q}_{n\ell m}$ es una base de armónicos reales.

A través de esta descomposición en modos, hemos podido etiquetar todos los grados de libertad que componen el campo real ϕ . Es importante resaltar que, efectivamente,

todos ellos satisfacen ecuaciones de movimiento desacopladas. Esto se puede ver haciendo uso de la Ec. (4.1.3) y las propiedades de ortonormalidad de \tilde{Q}_{nlm} . En resumen, la ecuación de movimiento para cada modo es

$$\ddot{q}_{nlm} + (\omega_n^2 + s) q_{nlm} = 0. \quad (4.1.10)$$

Además, de esta relación deducimos que todos aquellos modos con el mismo valor de n satisfacen la misma ecuación de movimiento.

De ahora en adelante vamos a llamar \mathcal{Q}_n al subespacio (lineal) de configuración que contiene todos los modos etiquetados con un mismo n . La dimensión de este subespacio es $g_n = n^2$; para comprobarlo basta con realizar un conteo del número de armónicos que hay con diferentes etiquetas ℓ y m para un valor de n dado. Los subespacios \mathcal{Q}_n son invariantes bajo la actuación del grupo $SO(4)$, porque el operador de Laplace-Beltrami, del que son espacios propios, lo es. Es más, cada subespacio \mathcal{Q}_n proporciona en realidad una representación irreducible del grupo, ya que las rotaciones mezclan todos los modos con idéntico autovalor ω_n^2 .

Del mismo modo que el campo escalar admite una descomposición en modos, su momento canónicamente conjugado puede descomponerse en una combinación lineal de armónicos esféricos convenientemente densitizados. Un cálculo muy sencillo nos permite ver que los coeficientes de la expansión, p_{nlm} , satisfacen la ecuación $p_{nlm} = \dot{q}_{nlm}$. Además, a través de los corchetes de Poisson (4.1.5) y de las relaciones de ortonormalidad de los armónicos, se puede probar que q_{nlm} y p_{nlm} forman un conjunto canónico de variables, con corchetes nulos salvo

$$\{q_{nlm}, p_{n'\ell'm'}\} = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (4.1.11)$$

Tomando entonces el espacio de momentos \mathcal{P}_n correspondiente a \mathcal{Q}_n , podemos descomponer el espacio de fases como $\Gamma = \bigoplus_n \Gamma_n$ con $\Gamma_n = \mathcal{Q}_n \oplus \mathcal{P}_n$. Asimismo, al igual que \mathcal{Q}_n , el espacio \mathcal{P}_n proporciona una representación irreducible del grupo $SO(4)$, también de dimensión n^2 y que obviamente coincide con la asociada al espacio de configuración.

4.1.2. Dinámica clásica

La dinámica clásica va a desempeñar un papel fundamental en nuestro estudio (junto con las simetrías de la ecuación de campo), por lo que merece especial atención. Consideremos el conjunto (infinito) de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que satisfacen los modos $\{q_{nlm}\}$ del campo, dadas en la Ec. (4.1.10). Como la función $s(t)$ es arbitraria, en general no podemos obtener explícitamente las soluciones, salvo de forma aproximada. Pondremos especial atención al comportamiento asintótico

de la solución para autovalores grandes del operador de Laplace-Beltrami, $n \rightarrow \infty$. Sin pérdida de generalidad, reescribimos las soluciones reales de la ecuación diferencial (4.1.10) de la forma

$$q_{\mathbf{n}}(t) = A_{\mathbf{n}} \exp[\omega_n \Theta_n(t)] + A_{\mathbf{n}}^* \exp[\omega_n \Theta_n^*(t)], \quad (4.1.12)$$

donde hemos introducido el símbolo \mathbf{n} para codificar en uno solo los tres índices n , ℓ y m , con objeto de compactificar la notación, aunque cuando sea necesario para mantener la claridad en la discusión usaremos los tres enteros originales. Los coeficientes $A_{\mathbf{n}}$ son constantes complejas que hacen las veces de datos iniciales, y las funciones Θ_n dependen del tiempo y satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden

$$\omega_n \ddot{\Theta}_n + \omega_n^2 \dot{\Theta}_n^2 + \omega_n^2 + s = 0, \quad (4.1.13)$$

que se deduce fácilmente introduciendo la Ec. (4.1.12) en (4.1.10).

La Ec. (4.1.13) depende sólo de $\dot{\Theta}_n$ y de su derivada temporal. De hecho, es posible reescribirla como una ecuación diferencial de Riccati en $\dot{\Theta}_n$. Por tanto, las funciones Θ_n están determinadas salvo una constante aditiva, que elegimos de modo que se cumpla la condición inicial $\Theta_n(t_0) = 0$. Por otra parte, puede verse que la Ec. (4.1.12) establece una relación unívoca entre las soluciones de las Ecs. (4.1.10) y (4.1.13) si las partes real e imaginarias de $\dot{\Theta}_n$ son funcionalmente independientes. Una manera de garantizarlo es tomar la condición inicial $\dot{\Theta}_n(t_0) = -i$. Una motivación para esta elección es que se satisface no ya a tiempo inicial, sino a todo tiempo, en el caso de que el campo escalar no posea masa [$s(t) = 0 \forall t \in \mathbb{I}$].

Por conveniencia, vamos a reescribir $\dot{\Theta}_n$ de la forma

$$\dot{\Theta}_n = -i + \frac{W_n}{\omega_n}, \quad (4.1.14)$$

lo que equivale a

$$\Theta_n = -i(t - t_0) + \int_{t_0}^t d\bar{t} \frac{W_n(\bar{t})}{\omega_n}, \quad (4.1.15)$$

una vez que hemos exigido que $\Theta_n(t_0) = 0$. La nueva función W_n satisface la ecuación

$$\dot{W}_n = 2i\omega_n W_n - W_n^2 - s, \quad (4.1.16)$$

con condiciones iniciales $W_n(t_0) = 0$ (deducidas de las condiciones iniciales de $\dot{\Theta}_n$). Vamos a estudiar las soluciones a esta ecuación en el régimen asintótico $n \rightarrow \infty$. En ese régimen, el término cuadrático W_n^2 en la Ec. (4.1.16) resulta ser despreciable frente al lineal W_n , cuyo coeficiente crece con n . En nuestro análisis asintótico, podemos empezar entonces despreciando ese término cuadrático, lo que conduce a la ecuación diferencial

$$\dot{W}_n = 2i\omega_n \bar{W}_n - s. \quad (4.1.17)$$

Esta ecuación es lineal en \bar{W}_n , y sus soluciones, con la condición inicial $\bar{W}_n(t_0) = 0$, son

$$\bar{W}_n(t) = -e^{2i\omega_n t} \int_{t_0}^t d\bar{t} s(\bar{t}) e^{-2i\omega_n \bar{t}}, \quad (4.1.18)$$

o, integrando por partes,

$$\bar{W}_n(t) = -\frac{is(t)}{2\omega_n} + \frac{is(t_0) e^{2i\omega_n(t-t_0)}}{2\omega_n} - \frac{e^{2i\omega_n t}}{2i\omega_n} \int_{t_0}^t d\bar{t} \dot{s}(\bar{t}) e^{-2i\omega_n \bar{t}}. \quad (4.1.19)$$

El valor absoluto del último término en esta ecuación está acotado por $\int_{t_0}^t d\bar{t} |\dot{s}|/(2\omega_n)$. Así que podemos concluir que existirá una función $\tilde{s}(t)$, independiente de n , tal que el valor absoluto de las soluciones (4.1.18) está acotado por $\tilde{s}(t)/(2\omega_n)$. Para alcanzar esta conclusión, es necesario que la derivada de la función $s(t)$ exista y que sea integrable en cada intervalo cerrado $[t_0, t]$ (o $[t, t_0]$) de \mathbb{I} .

Retomemos la ecuación original (4.1.16) e introduzcamos la expresión (4.1.19). El término \bar{W}_n^2 va a estar acotado en valor absoluto por $\tilde{s}(t)^2/(4\omega_n^2)$. En el límite $n \rightarrow \infty$ este término es efectivamente despreciable frente al lineal \bar{W}_n . Para hallar las soluciones completas a la Ec. (4.1.16), podemos aproximar W_n^2 por \bar{W}_n^2 , despreciando contribuciones asintóticas subdominantes. Esto nos lleva a una nueva ecuación de la forma (4.1.17), pero con un término adicional que equivale a sustituir la función $s(t)$ original por $s(t) - \bar{W}_n^2(t)$. Aplicando este procedimiento de forma recursiva, se puede obtener una serie asintótica para la solución buscada de la Ec. (4.1.16).

Como veremos más adelante, en nuestro estudio sólo nos va a hacer falta el término dominante de $W_n(t)$, es decir, las soluciones dadas por la Ec. (4.1.19) y que son del orden $1/\omega_n$.

Descripción canónica de la dinámica

Puesto que en la siguiente sección vamos a estudiar la descripción cuántica del sistema por medio de una cuantización de Fock estándar, vamos a reemplazar nuestras variables originales en el espacio de fases $(q_{n\ell m}, p_{n\ell m})$ por el par de variables de destrucción y creación

$$a_{n\ell m} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (\omega_n q_{n\ell m} + ip_{n\ell m}), \quad a_{n\ell m}^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (\omega_n q_{n\ell m} - ip_{n\ell m}), \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.1.20)$$

Debemos notar que el modo $n = 1$ no está incluido. Para nuestro estudio, aislar un grado de libertad del resto no altera el comportamiento del sistema desde el punto de vista de teoría de campos. La cuantización de este modo se abordaría de forma independiente, siguiendo métodos de mecánica cuántica, no por qué convencionales (por

ejemplo, podrían adoptarse técnicas poliméricas si la física del sistema lo requiriera, como podría ocurrir si la masa del modo fuera negativa). Así pues, de ahora en adelante nos centraremos en los modos $n \geq 2$.

Una consecuencia directa del desacoplo entre grados de libertad correspondientes a diferentes modos es que las transformaciones finitas generadas por la dinámica, que son transformaciones lineales simplécticas, pueden ser descompuestas en una descripción matricial en bloques 2×2 , cada bloque asociado a un par (a_n, a_n^*) . Esto nos permite concluir que la evolución clásica de las variables de creación y destrucción desde un tiempo t_0 a un tiempo t está totalmente determinada por un conjunto numerable de matrices $\mathcal{U}_n(t, t_0)$ de dimensión 2×2 ,

$$\begin{pmatrix} a_n(t) \\ a_n^*(t) \end{pmatrix} = \mathcal{U}_n(t, t_0) \begin{pmatrix} a_n(t_0) \\ a_n^*(t_0) \end{pmatrix}, \quad (4.1.21)$$

$$\mathcal{U}_n(t, t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_n(t, t_0) & \beta_n(t, t_0) \\ \beta_n^*(t, t_0) & \alpha_n^*(t, t_0) \end{pmatrix}. \quad (4.1.22)$$

Las funciones $\alpha_n(t, t_0)$ y $\beta_n(t, t_0)$ son los coeficientes de la transformación simpléctica (o transformación de *Bogoliubov*) que define la evolución. Por ello, los coeficientes deben satisfacer, para cualquier valor de t_0 , $t \in \mathbb{I}$ y $\forall n$, que

$$|\alpha_n(t, t_0)|^2 - |\beta_n(t, t_0)|^2 = 1. \quad (4.1.23)$$

Los coeficientes de Bogoliubov $\alpha_n(t, t_0)$ y $\beta_n(t, t_0)$ pueden determinarse en función de la solución $\Theta_n(t)$ de la Ec. (4.1.13). En primer lugar, las constantes A_n se pueden escribir en términos de los datos iniciales en el espacio de fases $q_n(t_0)$ y $p_n(t_0) = \dot{q}_n(t_0)$. Una vez que se conocen estos datos iniciales, es fácil escribir las matrices de evolución desde un tiempo t_0 a un tiempo t para el par canónico (q_n, p_n) , en las que aparecen las funciones Θ_n introducidas en la Ec. (4.1.12). Utilizando la relación (4.1.20) para pasar de este par canónico a las variables de creación y destrucción, concluimos que los coeficientes de Bogoliubov vienen dados por

$$\alpha_n(t, t_0) = \alpha_n(t, t_0) = \frac{1}{2} e^{\omega_n \Theta_n(t)} \left[1 + i \dot{\Theta}_n(t) \right], \quad (4.1.24)$$

$$\beta_n(t, t_0) = \beta_n(t, t_0) = \frac{1}{2} e^{\omega_n \Theta_n^*(t)} \left[1 + i \dot{\Theta}_n^*(t) \right]. \quad (4.1.25)$$

En particular, vemos de manera explícita que los coeficientes de las matrices de evolución sólo dependen del valor de n , y no de las etiquetas ℓ y m del modo. Las matrices de evolución quedan por tanto determinadas por las funciones Θ_n , soluciones a la Ec. (4.1.13). Como cabía esperar, en el límite ultravioleta ($\omega_n \rightarrow \infty$), el comportamiento de estos coeficientes es

$$\alpha_n(t, t_0) = e^{-i\omega_n(t-t_0)} + O(\omega_n^{-1}), \quad (4.1.26)$$

$$\beta_n(t, t_0) = O(\omega_n^{-2}), \quad (4.1.27)$$

donde el símbolo O indica que las contribuciones son del orden subdominante indicado en la expansión asintótica. Las relaciones (4.1.24) y (4.1.25) nos indican que, salvo correcciones del tipo $O(\omega_n^{-1})$, la evolución es idéntica a la de un campo escalar sin masa.

4.2. Representación cuántica: cuantización de Fock y evolución unitaria

Pasemos ahora a la descripción cuántica del sistema. Como hemos dicho ya, el modo $n = 1$ no será considerado en nuestro estudio. Introducimos una representación de Schrödinger de las reglas de conmutación canónicas –que se siguen a partir de los corchetes de Poisson (4.1.5)– en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{Q}, \mu)$ de funciones complejas en el espacio lineal de dimensión infinita $\mathcal{Q} = \bigoplus_n \mathcal{Q}_n$ y cuyo módulo al cuadrado es integrable con la medida gaussiana μ que detallamos a continuación. Esta medida en \mathcal{Q} se obtiene como producto de medidas gaussianas unidimensionales, una para cada grado de libertad, definidas para cada frecuencia ω_n . Explícitamente, la medida es

$$d\mu = \prod_{n,\ell,m} \left(\sqrt{\frac{\omega_n}{\pi}} e^{-\omega_n q_{n\ell m}^2} dq_{n\ell m} \right). \quad (4.2.1)$$

Los operadores básicos de configuración y momento compatibles con esta medida son, respectivamente

$$\hat{q}_{n\ell m} \Psi = q_{n\ell m} \Psi, \quad \hat{p}_{n\ell m} \Psi = -i \frac{\partial}{\partial q_{n\ell m}} \Psi + i\omega_n q_{n\ell m} \Psi, \quad (4.2.2)$$

donde Ψ es un estado arbitrario del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Esta representación está naturalmente asociada a la representación de un campo escalar sin masa.

Esta construcción es totalmente análoga a la que proporciona el espacio de Hilbert construido a partir de la compleción del espacio de fases canónico Γ (o, equivalentemente, del espacio de soluciones) con el producto interno natural que se puede definir mediante la estructura simpléctica y una cierta estructura compleja j_0 . Recordamos que una estructura compleja J es:

- (I) Una transformación simpléctica $[\Omega(J\cdot, J\cdot) = \Omega(\cdot, \cdot)]$ cuyo cuadrado es menos la identidad, $J^2 = -\mathbf{I}$.

- (II) Compatible con la estructura simpléctica, lo que permite definir un producto interno definido positivo:

$$\mu(\cdot, \cdot) = [\Omega(J\cdot, \cdot) - i\Omega(\cdot, \cdot)]/2. \quad (4.2.3)$$

La estructura compleja introduce una separación natural de frecuencias positivas y negativas, siendo la pieza de nuestra teoría que codifica la ambigüedad a la hora de elegir una representación particular de las relaciones canónicas de conmutación. Para más detalles véanse, por ejemplo, las Refs. [28, 124].

La compleción del espacio de fases con el producto interno (II) proporciona el espacio de Hilbert de una partícula. Tomando el producto tensorial simetrizado de k copias de este espacio, y la suma directa de los espacios resultantes, llegamos a un espacio de Hilbert de tipo Fock (véase la Ref. [124]).

Este espacio de Fock es unitariamente equivalente al espacio de Hilbert asociado a la medida gaussiana (4.2.1) si se elige como estructura compleja la que resulta natural en el caso de masa nula:

$$j_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(-\bar{\Omega}\Delta)^{-1/2} \\ (-\bar{\Omega}\Delta)^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ P \end{pmatrix}. \quad (4.2.4)$$

Esta estructura compleja es obviamente invariante bajo la acción del grupo $SO(4)$, ya que está construida a partir de la métrica y del operador de Laplace-Beltrami. Esta invariancia conduce de forma inmediata a una implementación unitaria de ese grupo de transformaciones en la teoría cuántica. Además, j_0 es independiente del tiempo, lo que aseguraría la implementación unitaria de la dinámica si la masa se anulara (o, en realidad, si fuera constante), aunque ése no es nuestro caso en general. De hecho, no es de esperar que exista ninguna estructura compleja invariante bajo la dinámica, debido a que la ecuación (4.1.10) incluye el término variable en el tiempo $s(t)$.

A pesar de eso, es totalmente legítimo preguntarse si la dinámica puede ser implementada unitariamente respecto a la representación que define j_0 . Para ello, es más conveniente trabajar en la base de operadores de creación y destrucción que introdujimos en la Ec. (4.1.20). La estructura compleja, una vez que se ha realizado una expansión en modos, tiene una forma particularmente sencilla

$$j_0 \begin{pmatrix} a_{\mathbf{n}} \\ a_{\mathbf{n}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{n}} \\ a_{\mathbf{n}}^* \end{pmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Utilizando las relaciones lineales (4.1.20), podemos construir los operadores $\hat{a}_{\mathbf{n}}$ a partir de los observables $\hat{q}_{\mathbf{n}}$ y $\hat{p}_{\mathbf{n}}$ definidos en (4.2.2).

En imagen de Heisenberg, la evolución temporal en la teoría cuántica es representada por la transformación de Bogoliubov definida por las Ecs. (4.1.21) y (4.1.22), donde los operadores $\hat{a}_{\mathbf{n}}$ y $\hat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger$ a un tiempo inicial t_0 evolucionan a los operadores $\hat{a}_{\mathbf{n}}(t)$ y $\hat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger(t)$ a un tiempo t , respectivamente, siguiendo la misma transformación:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{n}}(t) \\ \hat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{n}}(t, t_0) & \beta_{\mathbf{n}}(t, t_0) \\ \beta_{\mathbf{n}}^*(t, t_0) & \alpha_{\mathbf{n}}^*(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{n}} \\ \hat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (4.2.6)$$

La cuestión que queremos responder es si esta transformación completa, es decir, considerando todos los tripletes \mathbf{n} (incluidos todos los valores posibles de ℓ y m), se puede representar en la teoría cuántica de manera unitaria; o en otras palabras, si se corresponde con una transformación unitaria $U(t, t_0)$ en el espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Para ello, podemos hacer uso de los resultados de las Refs. [129, 130]. Éstos afirman que, si tenemos una representación de Fock de las relaciones canónicas de conmutación determinadas por una estructura compleja J , la transformación canónica T admite una implementación unitaria en esa representación si y sólo si la parte antilineal de T , es decir $(T + JTJ)/2$, es un operador del tipo Hilbert-Schmidt. Un operador R en un espacio de Hilbert se dice que es Hilbert-Schmidt si la traza de $R^\dagger R$ es finita, siendo R^\dagger el operador adjunto correspondiente. Obviamente, en sistemas con un número infinito de grados de libertad, una transformación canónica no tiene porqué satisfacer este requerimiento, por lo que no todas las transformaciones canónicas tienen una implementación cuántica unitaria.

En nuestro caso, para la familia de transformaciones simplécticas definida por la dinámica clásica, la condición de Hilbert-Schmidt en la representación de j_0 es equivalente a requerir que los coeficientes de Bogoliubov $\beta_{n\ell m}$, correspondientes a las matrices $\mathcal{U}_{n\ell m}(t, t_0)$ [véanse las Ecs. (4.1.22) y (4.1.25)], sean de cuadrado sumable, es decir, que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\beta_{n\ell m}(t, t_0)|^2 < \infty \quad \forall t \in \mathbb{I}. \quad (4.2.7)$$

Pero, según la Ec. (4.1.25), estos coeficientes son independientes de las etiquetas ℓ y m , por lo que podemos sumar inmediatamente sobre ellos introduciendo el factor de degeneración $g_n = n^2$ (dimensión de los subespacios \mathcal{Q}_n):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\beta_{n\ell m}(t, t_0)|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} g_n |\beta_n(t, t_0)|^2. \quad (4.2.8)$$

Por tanto, la condición de implementación unitaria equivale a pedir que la secuencia $\{n\beta_n(t, t_0)\}$ sea de cuadrado sumable. Ahora bien, esta propiedad depende únicamente del comportamiento asintótico de los coeficientes cuando $n \rightarrow \infty$. En la Sección 4.1.2

podimos ver, a través de la Ec. (4.1.27), que en el régimen $n \rightarrow \infty$ la contribución dominante de $\beta_n(t, t_0)$ es del orden $1/n^2$. Esto nos garantiza que la secuencia $\{n\beta_n(t, t_0)\}$ es de cuadrado sumable, es decir, que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |\beta_n(t, t_0)|^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{I}. \quad (4.2.9)$$

Por tanto, la dinámica admite una implementación unitaria en la representación cuántica que proporciona j_0 . Claramente, esta conclusión es independiente del valor escogido para el tiempo de referencia $t_0 \in \mathbb{I}$.

En resumen, hemos visto que la forma natural de implementar las simetrías clásicas en la teoría cuántica es requiriendo que las estructuras que definen la cuantización sean invariantes bajo el grupo de transformaciones asociado. Si esto no es posible, lo siguiente que uno pide, de forma natural, es que al menos esas transformaciones se puedan implementar unitariamente en el modelo cuántico. Dado que hemos sido capaces de identificar una estructura compleja que es invariante bajo el grupo $SO(4)$, estas transformaciones pueden ser implementadas de forma inmediata como un grupo de transformaciones unitarias. En cuanto al conjunto de transformaciones que define la dinámica en el espacio de fases, sabemos que no es posible exigir invariancia en la evolución a las estructuras que definen nuestro modelo cuántico, así que lo que hemos hecho es comprobar que, al menos, esas transformaciones admiten una implementación unitaria en la teoría cuántica. En efecto, la representación asociada a la estructura compleja j_0 permite implementar la dinámica unitariamente.

Motivados por estos logros, en este capítulo sólo vamos a considerar aquellas estructuras complejas que son invariantes bajo el grupo $SO(4)$, lo que nos garantizará una implementación unitaria de dichas simetrías. En cuanto a las transformaciones canónicas generadas por la dinámica, exigiremos que la representación de Fock proporcione una implementación unitaria de las mismas. Ésta será la estrategia que seguiremos en esta tesis. Veremos que nos permitirá alcanzar los resultados de unicidad de la cuantización deseados.

4.3. Unicidad de la representación: invariancia $SO(4)$ y dinámica unitaria

En esta sección vamos a ver cómo caracterizar la familia de representaciones que son invariantes bajo el grupo de transformaciones $SO(4)$. Veremos que las estructuras complejas correspondientes están relacionadas unas con otras por medio de una familia particular de transformaciones simplécticas. Por el momento hemos sido capaces de

encontrar una representación invariante $SO(4)$ que admite una evolución unitaria. La cuestión que queremos responder es si existe otra representación con las mismas características (de invariancia y unitariedad) y que sea unitariamente inequivalente a la representación inicial j_0 . Veremos que la respuesta es negativa. Aunque existen infinitas representaciones invariantes que no son unitariamente equivalentes, aquéllas que admiten una evolución unitaria pertenecen a una misma clase de equivalencia unitaria.

4.3.1. Estructuras complejas invariantes $SO(4)$

Una estructura compleja J es invariante bajo un grupo G si todos los elementos $g \in G$ en una representación adecuada T conmutan con ella. En otras palabras, $T(g)^{-1}JT(g) = J$, $\forall g \in G$. En el caso particular que estamos considerando, existe un grupo natural de simetrías: el grupo $SO(4)$.

Estamos interesados en caracterizar todas aquellas estructuras complejas que son invariantes bajo la acción del grupo $SO(4)$. Afortunadamente, podemos hacer uso del lema de Schur (ver Refs. [131] y [125]) para llegar a tal fin. En primer lugar, hemos visto que nuestro espacio de fases Γ se puede descomponer como la suma directa de los subespacios $\Gamma_n = \mathcal{Q}_n \oplus \mathcal{P}_n$ (véase la Sección 4.1.1), y que tanto \mathcal{Q}_n como \mathcal{P}_n proveen una representación irreducible del grupo de rotaciones. Una simple aplicación del lema de Schur nos permite concluir entonces que cualquier J invariante bajo el grupo $SO(4)$ debe ser diagonal por bloques en esa descomposición, es decir

$$J = \bigoplus_n J_n, \quad (4.3.1)$$

donde $J_n : \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n$ son estructuras complejas invariantes bajo el grupo $SO(4)$ cualesquiera. Podemos refinar aún más la forma de cada una de las componentes J_n considerando la base que proporcionan $q_{n\ell m}$ y su momento $p_{n\ell m}$. En ella, cada estructura compleja J_n se divide en cuatro bloques: J_n^{qq} , J_n^{qp} , J_n^{pq} y J_n^{pp} , los cuales relacionan respectivamente \mathcal{Q}_n consigo mismo, \mathcal{Q}_n con \mathcal{P}_n , \mathcal{P}_n con \mathcal{Q}_n , y \mathcal{P}_n con él mismo. En esta descomposición por bloques, la invariancia se traduce en

$$\begin{aligned} T_n^q(g)J_n^{qq} &= J_n^{qq}T_n^q(g), & T_n^p(g)J_n^{pq} &= J_n^{pq}T_n^q(g), \\ T_n^q(g)J_n^{qp} &= J_n^{qp}T_n^p(g), & T_n^p(g)J_n^{pp} &= J_n^{pp}T_n^p(g), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

donde $T_n^q(g)$ es la matriz correspondiente al elemento $g \in SO(4)$ en la representación irreducible del grupo $SO(4)$ en el espacio de configuración. Igualmente, para el espacio de momentos, utilizamos la notación $T_n^p(g)$. En realidad ambas matrices $T_n^q(g)$ y $T_n^p(g)$ coinciden, puesto que están asociadas a la misma representación irreducible —de dimensión n^2 — de $SO(4)$.

De nuevo, el lema de Schur nos asegura que las matrices J_n^{qq} , J_n^{qp} , J_n^{pq} y J_n^{pp} deben ser proporcionales a la matriz identidad de dimensión n^2 , \mathbb{I}_n , es decir, $J_n^{qq} = a_n \mathbb{I}_n$, $J_n^{pq} = b_n \mathbb{I}_n$, $J_n^{qp} = c_n \mathbb{I}_n$ y $J_n^{pp} = d_n \mathbb{I}_n$. Las constantes a_n , b_n , c_n y d_n son números reales, ya que las estructuras complejas son aplicaciones lineales reales y estamos describiéndolas en una base de coordenadas reales, formada por las variables de configuración y momento de los modos.

Ahora que ya sabemos cómo caracterizar estructuras complejas invariantes $SO(4)$, será conveniente deducir cuál es la relación entre éstas y la estructura compleja de partida, j_0 , que caracteriza la representación (4.2.2).

Los subespacios Γ_n pueden descomponerse como

$$\Gamma_n = \bigoplus_{\ell m} \Gamma_{n\ell m}, \quad (4.3.3)$$

donde cada $\Gamma_{n\ell m}$ es un espacio de fases bidimensional asociado al par canónico $q_{n\ell m}$ y $p_{n\ell m}$. Del mismo modo, cada bloque J_n de las estructuras complejas invariantes admite una descomposición similar, es decir

$$J_n = \bigoplus_{\ell m} J_{n\ell m}, \quad (4.3.4)$$

donde todas las $J_{n\ell m}$ coinciden para un mismo n (son independientes de ℓ y m).

Para poder comparar con los bloques correspondientes de j_0 , pasamos de la base real (q_n, p_n) a la base compleja definida por a_n y a_n^* , en la que teníamos expresada la estructura compleja de partida [véase la Ec. (4.1.20)]. La estructura compleja invariante J diagonal por bloques J_n , tras expresarla en la nueva base, pasará a llamarse j , también diagonal por bloques, cada uno designado por j_n . Es decir

$$j = \bigoplus_n j_n. \quad (4.3.5)$$

La correspondencia entre j y j_0 vendrá dada por una transformación simpléctica \mathcal{K} , de manera que

$$j = \mathcal{K} j_0 \mathcal{K}^{-1}. \quad (4.3.6)$$

Dado que ambas estructuras complejas j y j_0 son diagonales por bloques [véanse las Ecs. (4.3.5) y (4.2.5)], las transformaciones \mathcal{K} adoptan también una forma diagonal por bloques:

$$\mathcal{K} = \bigoplus_n \mathcal{K}_n. \quad (4.3.7)$$

Puesto que \mathcal{K}_n es una transformación simpléctica, podemos concluir que su forma más general será

$$\mathcal{K}_n = \begin{pmatrix} \kappa_n & \lambda_n \\ \lambda_n^* & \kappa_n^* \end{pmatrix}, \quad (4.3.8)$$

con

$$|\kappa_n|^2 - |\lambda_n|^2 = 1, \quad \forall n. \quad (4.3.9)$$

Ahora bien, como vimos en la Sección 4.2 (al estudiar la transformación simpléctica que induce la dinámica clásica), la condición para que una transformación de este tipo admita una implementación unitaria respecto a j_0 es que su parte antilineal sea Hilbert-Schmidt. En el caso de las transformaciones \mathcal{K} esto se traduce en

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\lambda_n|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} g_n |\lambda_n|^2 < \infty, \quad (4.3.10)$$

donde hemos introducido de nuevo el factor de degeneración $g_n = n^2$.

En resumen, cualquier estructura compleja J invariante bajo $SO(4)$ puede relacionarse con j_0 a través de una transformación simpléctica \mathcal{K} que debe ser diagonal por bloques respecto de la descomposición (4.3.3), donde los bloques \mathcal{K}_n sólo dependen de n (no de ℓ ni de m), y cada uno de ellos tiene una expresión general dada por la Ec. (4.3.8). Así pues, la familia de transformaciones \mathcal{K} codifica toda la información acerca de las estructuras complejas invariantes bajo el grupo $SO(4)$.

4.3.2. Condiciones para la unitariedad de la dinámica en una representación invariante $SO(4)$ arbitraria

Hemos visto que la evolución se puede identificar con una transformación simpléctica diagonal por bloques y que está determinada por el conjunto de las matrices de evolución $\{\mathcal{U}_n\}$ dadas por la Ec. (4.1.22). Ya sabemos que esta transformación admite una implementación unitaria respecto de j_0 . Pero lo que queremos es comparar diferentes representaciones (cualquiera dada por una estructura compleja invariante j con la inicial j_0). Para ello, podemos hacer uso del hecho de que una transformación simpléctica R admite una implementación unitaria respecto de j si la transformación $\mathcal{K}^{-1}R\mathcal{K}$ admite una implementación así en la representación determinada por j_0 . Para el caso en que tomamos como transformación R la propia evolución, esto equivale a decir que la transformación asociada al conjunto de matrices $\{\mathcal{K}_n^{-1}\mathcal{U}_n\mathcal{K}_n\}$ puede implementarse de manera unitaria respecto de j_0 .

Puesto que \mathcal{U}_n y \mathcal{K}_n son independientes de los índices ℓ y m , las nuevas matrices de evolución son también independientes de ellos. Asimismo, tienen una forma similar a la transformación de Bogoliubov (4.1.22), pero con nuevos coeficientes $\alpha_n^j(t, t_0)$ y $\beta_n^j(t, t_0)$. Un cálculo muy sencillo nos permite expresarlos en términos de los originales $\alpha_n(t, t_0)$ y $\beta_n(t, t_0)$:

$$\alpha_n^j(t, t_0) = |\kappa_n|^2 \alpha_n(t, t_0) - |\lambda_n|^2 \alpha_n^*(t, t_0) + 2i \Im[\kappa_n^* \lambda_n^* \beta_n(t, t_0)], \quad (4.3.11)$$

$$\beta_n^j(t, t_0) = (\kappa_n^*)^2 \beta_n(t, t_0) - \lambda_n^2 \beta_n^*(t, t_0) + 2i \kappa_n^* \lambda_n \Im[\alpha_n(t, t_0)], \quad \forall t \in \mathbb{I}. \quad (4.3.12)$$

En resumen, la condición de que la evolución sea implementable unitariamente respecto de la estructura compleja $j = \mathcal{K} j_0 \mathcal{K}^{-1}$ equivale a que los coeficientes $\beta_n^j(t, t_0)$ sean de cuadrado sumable, es decir

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\beta_n^j(t, t_0)|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} g_n |\beta_n^j(t, t_0)|^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{I}, \quad (4.3.13)$$

con $g_n = n^2$. Como veremos en la siguiente sección, esta condición se satisface si y sólo si la secuencia $\{n\lambda_n\}$ es de cuadrado sumable, que es justamente el requerimiento necesario para que las representaciones definidas por j y j_0 sean unitariamente equivalentes [véase la Ec. (4.3.10), tomando el valor n^2 para el factor de degeneración] .

4.3.3. Prueba sobre la unicidad de la representación

La demostración comienza asumiendo que la secuencia $\{n\beta_n^j(t, t_0)\}$ es de cuadrado sumable. Esta condición nos asegura la implementación unitaria de la evolución respecto de la estructura compleja j . Como $|\kappa_n| \geq 1$ [véase la Ec. (4.3.9)], también son de cuadrado sumable las secuencias

$$\frac{n\beta_n^j(t, t_0)}{(\kappa_n^*)^2} = n\beta_n(t, t_0) - nz_n^2 \beta_n^*(t, t_0) + 2in z_n \Im[\alpha_n(t, t_0)] \quad (4.3.14)$$

con $z_n = \lambda_n / \kappa_n^*$. Además, la relación (4.3.9) nos dice que la secuencia $\{z_n\}$ está acotada. Asimismo, sabemos ya que $\{n\beta_n(t, t_0)\}$ es de cuadrado sumable. Con todo esto, podemos garantizar que

$$\{n\beta_n(t, t_0) - nz_n^2 \beta_n^*(t, t_0)\} \quad (4.3.15)$$

es una secuencia de cuadrado sumable $\forall t \in \mathbb{I}$.

Dado que el conjunto de secuencias de cuadrado sumable es un espacio lineal, llegamos a la conclusión de que

$$\{n z_n \Im[\alpha_n(t, t_0)]\} \quad (4.3.16)$$

es de cuadrado sumable $\forall t \in \mathbb{I}$ también —el lado izquierdo de la Ec. (4.3.14) lo es por hipótesis—. Utilizando las Ecs. (4.1.24) y (4.1.15) para determinar el comportamiento asintótico de $\Im[\alpha_n]$ cuando $n \rightarrow \infty$, podemos ver que

$$n\Im[\alpha_n] = ne^{\omega_n \Re[\Theta_n]} \left(1 - \frac{\Im[W_n]}{2\omega_n} \right) \sin(\omega_n \Im[\Theta_n]) + ne^{\omega_n \Re[\Theta_n]} \frac{\Re[W_n]}{2\omega_n} \cos(\omega_n \Im[\Theta_n]). \quad (4.3.17)$$

Mediante las Ecs. (4.1.15) y (4.1.19) podemos obtener la forma asintótica de Θ_n . Si además recordamos que $\{z_n\}$ está acotada y que las secuencias de cuadrado sumable forman un espacio lineal, es fácil darse cuenta de que el único de los sumandos que aparece en la secuencia (4.3.16) que no es directamente de cuadrado sumable es el correspondiente a

$$\{nz_n e^{\omega_n \Re[\Theta_n]} \sin(\omega_n \Im[\Theta_n])\}. \quad (4.3.18)$$

Por otra parte, la secuencia formada por $e^{\omega_n \Re[\Theta_n]}$ está acotada, debido a que el comportamiento asintótico de $\omega_n \Re[\Theta_n]$ es al menos del orden de $1/n$. Concluimos así que la secuencia

$$\{n z_n \sin(\omega_n \Im[\Theta_n])\}, \quad (4.3.19)$$

debe ser de cuadrado sumable $\forall t \in \mathbb{I}$ si queremos la estructura compleja invariante j admita una implementación unitaria de la dinámica.

El comportamiento asintótico de la función $\Im[\Theta_n]$ se puede determinar, siempre y cuando la función $s(t)$ tenga una segunda derivada integrable en cualquier intervalo contenido en \mathbb{I} . Para empezar, debemos recordar que Θ_n adopta la forma (4.1.15), donde la función W_n viene dada por la relación (4.1.19) hasta orden $1/n^2$. El último sumando, una vez ha sido integrado por partes y se han despreciado términos de orden $1/n^2$, está dado por

$$-\frac{s(t)}{2\omega_n} + \frac{s(t_0)}{2\omega_n} \cos[2\omega_n(t - t_0)]. \quad (4.3.20)$$

Como

$$\int_{t_0}^t d\bar{t} \cos[2\omega_n(\bar{t} - t_0)] = \frac{\sin[2\omega_n(t - t_0)]}{2\omega_n}, \quad (4.3.21)$$

es posible ver, utilizando la Ec. (4.1.15), que

$$\Im[\omega_n \Theta_n(t, t_0)] = -\omega_n(t_0 - t) - \int_t^{t_0} d\bar{t} \frac{s(\bar{t})}{2\omega_n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (4.3.22)$$

Consecuentemente, en el régimen de n suficientemente grande, obtenemos

$$\sin(\omega_n \Im[\Theta_n]) = -\sin \left[\omega_n(t - t_0) + \int_{t_0}^t d\bar{t} \frac{s(\bar{t})}{2\omega_n} \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (4.3.23)$$

donde $O(1/n^2)$ designa contribuciones de orden asintótico $1/n^2$. Después de multiplicar por nz_n , el último término da una contribución del orden de $1/n$ que es de cuadrado sumable. La conclusión a la que llegamos es que la secuencia

$$\left\{ n z_n \sin \left[\omega_n(t - t_0) + \int_{t_0}^t d\bar{t} \frac{s(\bar{t})}{2\omega_n} \right] \right\} \quad (4.3.24)$$

debe ser de cuadrado sumable $\forall t \in \mathbb{I}$.

Vamos a introducir por conveniencia la notación $\tau = t - t_0$, reescribiendo los términos de la secuencia anterior como

$$n z_n \sin \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right]. \quad (4.3.25)$$

Así pues, como consecuencia de la sumabilidad al cuadrado deducida, la función

$$Z(\tau) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^M n^2 |z_n|^2 \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right] \quad (4.3.26)$$

debe existir para todo $\tau \in \bar{\mathbb{I}}$, donde $\bar{\mathbb{I}}$ se corresponde con el dominio \mathbb{I} de t después de introducir el desplazamiento apropiado, t_0 . En particular, $Z(\tau)$ está bien definida en algún subintervalo cerrado de la forma $\bar{\mathbb{I}}_L = [a, a+L] \subseteq \bar{\mathbb{I}}$ (para una elección conveniente de a), donde L es un número positivo estrictamente menor que la longitud de \mathbb{I} .

Tanto si la función $Z(\tau)$ es integrable como si no (se trata de una suma infinita de funciones integrables) en el intervalo $\bar{\mathbb{I}}_L$, el teorema de Luzin nos asegura que para cada $\delta > 0$ existe: i) un conjunto medible $E_\delta \subset \bar{\mathbb{I}}_L$ tal que su complementario \bar{E}_δ respecto de $\bar{\mathbb{I}}_L$ satisface $\int_{\bar{E}_\delta} d\tau < \delta$, y ii) una función $F_\delta(\tau)$ continua en $\bar{\mathbb{I}}_L$ que coincide con $Z(\tau)$ en E_δ . En estas condiciones, vamos a demostrar que la secuencia $\{nz_n\}$ debe ser de cuadrado sumable. En particular, si definimos $I_\delta = \int_{E_\delta} F_\delta(\tau) d\tau$, que es un número real finito, concluimos del teorema de Luzin que

$$\sum_{n=2}^M n^2 |z_n|^2 \int_{E_\delta} \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right] d\tau \leq \int_{E_\delta} Z(\tau) d\tau = I_\delta, \quad \forall M \in \mathbb{N}^+, \quad (4.3.27)$$

con $M \geq 2$.

Sólo nos resta probar que la integral sobre E_δ que aparece a la izquierda de la desigualdad está acotada inferiormente por un número finito positivo para $n > n_0 \in \mathbb{N}^+$ con n_0 suficientemente grande. Esa integral puede reescribirse como

$$\int_{\bar{\mathbb{I}}_L} \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right] d\tau - \int_{\bar{E}_\delta} \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right] d\tau, \quad (4.3.28)$$

que es inmediato ver que es siempre mayor o igual que

$$\int_{\bar{\mathbb{I}}_L} \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right] d\tau - \delta, \quad \forall n. \quad (4.3.29)$$

Para la integral sobre $\bar{\mathbb{I}}_L$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\mathbb{I}}_L} \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right] d\tau &= \frac{L}{2} - \frac{\sin \left[2\omega_n(a + L) + \int_0^{(a+L)} d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{\omega_n} \right]}{4\omega_n + \frac{2s(a+L+t_0)}{\omega_n}} \\ &+ \frac{\sin \left[2\omega_n a + \int_0^a d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{\omega_n} \right]}{4\omega_n + \frac{2s(a+t_0)}{\omega_n}} - \frac{1}{8\omega_n^3} \int_{\bar{\mathbb{I}}_L} \frac{s'(\tau + t_0)}{\left[1 + \frac{s(\tau + t_0)}{2\omega_n^2} \right]^2} \sin \left[2\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{\omega_n} \right] d\tau \\ &\geq \frac{L}{2} - \frac{\omega_n}{|4\omega_n^2 + 2s(a + L + t_0)|} - \frac{\omega_n}{|4\omega_n^2 + 2s(a + t_0)|} - \frac{1}{8\omega_n^3} \int_{\bar{\mathbb{I}}_L} \frac{|s'(\tau + t_0)|}{\left[1 + \frac{s(\tau + t_0)}{2\omega_n^2} \right]^2} d\tau, \end{aligned}$$

donde ' denota derivada respecto de τ . Vamos a restringirnos de ahora en adelante a enteros $n \geq n_0$, donde n_0 es un entero positivo dado tal que $\omega_{n_0}^2$ es mayor que el máximo de la función $|s(\tau + t_0)|/(2D)$ en el intervalo $\bar{\mathbb{I}}_L$. Aquí, D es una constante cualquiera sujeta sólo a la condición $D < 1$. Entonces, como ω_n crece monótonamente con n ,

$$\left| 1 + \frac{s(\tau + t_0)}{2\omega_n^2} \right| \geq 1 - \frac{|s(\tau + t_0)|}{2\omega_n^2} \geq 1 - \frac{|s(\tau + t_0)|}{2\omega_{n_0}^2} \geq 1 - D, \quad \forall \tau \in \bar{\mathbb{I}}_L, \quad (4.3.30)$$

incluidos los puntos en los extremos del intervalo. En consecuencia se obtiene que, para todo $n \geq n_0$,

$$\int_{\bar{\mathbb{I}}_L} \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right] d\tau \geq \frac{L}{2} - \frac{1}{2\omega_{n_0}(1 - D)} - \frac{\int_{\bar{\mathbb{I}}_L} |s'(\tau + t_0)| d\tau}{8\omega_{n_0}^3(1 - D)^2} = \Lambda_{n_0},$$

donde asumimos que n_0 se elige de tal forma que $\Lambda_{n_0} > 0$ (lo que siempre se puede hacer ya que Λ_{n_0} tiende a $L/2$ cuando $n_0 \rightarrow \infty$).

Introduciendo esto en la Ec. (4.3.29), obtenemos la cota

$$\int_{E_\delta} \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right] d\tau \geq \Lambda_{n_0} - \delta. \quad (4.3.31)$$

La constante δ puede elegirse de forma tal que $\Lambda_{n_0} > \delta$. Concluimos así de la Ec. (4.3.27) que, para todo $M \geq n_0$,

$$\sum_{n=n_0}^M n^2 |z_n|^2 \leq \frac{I_\delta}{\Lambda_{n_0} - \delta}. \quad (4.3.32)$$

Puesto que n_0 es un entero que se fijó previamente, este resultado es válido independientemente de M , y en particular para valores suficientemente grandes. Esto nos permite concluir que, efectivamente, $\{n^2|z_n|^2\}$ es sumable, como queríamos demostrar.

Si recordamos que $z_n = \lambda_n/\kappa_n^*$, esta condición de sumabilidad, junto con la relación (4.3.9), permite deducir que λ_n debe tender a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, $|\kappa_n|$ tiende a uno, por lo que la secuencia $\{\kappa_n\}$ debe estar acotada. Esto nos permite concluir que la secuencia $\{n\lambda_n\}$ debe ser también de cuadrado sumable. Esta última condición equivale a la Ec. (4.3.10), lo que nos garantiza que las representaciones que proporcionan las estructuras complejas j y j_0 son unitariamente equivalentes. Finalizamos así nuestra demostración sobre la unicidad de la clase de equivalencia formada por las estructuras complejas invariantes bajo el grupo $SO(4)$ que admiten una implementación unitaria de la dinámica.

4.4. Unicidad de la parametrización del campo

En el modelo que estamos estudiando se puede considerar un nuevo tipo de transformación canónica de gran interés en el campo de la cosmología [36, 37, 101, 126, 132], o incluso en teoría de cuerdas [133]: se trata de transformaciones en las que el campo escalar es re-escalado por una función dependiente del tiempo. En aquellos escenarios en los que un campo se propaga en un espaciotiempo no estacionario, suele ser posible adoptar una descripción más asequible para la dinámica cambiando el campo original por otro en el que parte de la dependencia temporal ha sido absorbida mediante un re-escalado. Típicamente, el factor por el que se re-escala es una función de la geometría de fondo en la que se propaga el campo. El re-escalado afecta por igual a todos y cada uno de los modos del campo. Los ejemplos más claros son campos de prueba de tipo Klein-Gordon que se propagan en un fondo cosmológico homogéneo e isótropo de tipo FLRW. En este tipo de fondos, es común introducir un re-escalado utilizando exclusivamente el factor de escala que caracteriza la métrica. Adoptando tiempo conforme, el nuevo campo resulta satisfacer una ecuación de Klein-Gordon en un fondo estático, pero con masa dependiente del tiempo. Otro ejemplo lo proporciona la teoría de Einstein-Maxwell (sin fuentes) en un espaciotiempo de FLRW, donde la descripción en tiempo conforme y en el gauge de Lorentz del vector potencial convenientemente re-escalado satisface una ecuación de ondas sin masa en un espaciotiempo estático [126]. Pero los sistemas que van a resultar de mayor interés en el desarrollo de esta tesis son los que describen perturbaciones cosmológicas de universos homogéneos e isótropos como el nuestro [36, 37, 40, 42, 101]. En particular, la perturbación invariante de gauge asociada a la densidad de energía puede ser re-escalada adecuadamente por una

función dependiente del tiempo (y en tiempo conforme) para dar lugar a una ecuación de tipo Klein-Gordon en un espaciotiempo estático y con una masa dependiente del tiempo [40]. El mismo tipo de ecuación se deduce al estudiar el régimen ultravioleta de las perturbaciones de un campo escalar en un espaciotiempo de FLRW con curvatura positiva, después de realizar una fijación de gauge adecuada y tras un re-escalado conveniente [42, 132]. De manera similar, las perturbaciones tensoriales en un espaciotiempo de FLRW, que describen el contenido de ondas gravitacionales, están sujetas a una ecuación de esas características después de un re-escalado adecuado (y en tiempo conforme) [40, 42].

Como vemos, las situaciones en las que nuestros resultados de unicidad sobre la cuantización de un campo de Klein-Gordon en la tres-esfera, con masa dependiente del tiempo, encuentran aplicación engrosan una lista de sistemas cosmológicos considerable, siempre y cuando se admita una redefinición de los campos que permita extraer parte de su dependencia temporal, la cual puede deberse, por ejemplo, a la interacción con el fondo no estacionario.

Lo que vamos a probar en esta sección es que nuestros criterios de unicidad sólo son compatibles con una descripción de campo particular: aquella dada por las relaciones de la Ec. (4.1.6). Cualquier otro par de variables relacionadas por un re-escalado del campo con funciones dependientes del tiempo no admite una dinámica unitaria respecto a una representación invariante bajo el grupo $SO(4)$.

4.4.1. Ambigüedad en la elección del campo: transformación canónica dependiente del tiempo

Nuestro punto de partida es el modelo que hemos estudiado en la Sección 4.2. Recordemos que hemos considerado un campo escalar ϕ que se propaga en un espaciotiempo estático, de secciones espaciales isomorfas a tres-esferas, y sujeto a un potencial dependiente del tiempo. Su ecuación de movimiento es invariante bajo el grupo de simetrías $SO(4)$. Hemos introducido una base de armónicos, autofunciones del operador de Laplace-Beltrami, en la que ϕ se puede descomponer en modos. Hemos estudiado su dinámica clásica y hemos visto que se corresponde a la de un campo escalar sin masa, salvo correcciones asintóticas del orden del inverso del autovalor de Laplace-Beltrami. Hemos empleado entonces una cuantización estándar de tipo Fock, introduciendo la representación naturalmente asociada al campo escalar sin masa. Esta representación es invariante bajo el grupo $SO(4)$, por lo que las simetrías clásicas admiten una implementación unitaria en la teoría cuántica. En cuanto a la dinámica, la representación no es invariante bajo traslaciones en el tiempo, pero sí admite una implementación

unitaria de la evolución. Además, hemos probado que cualquier otra representación invariante bajo el grupo de simetrías $SO(4)$ que admite una implementación unitaria de la dinámica es unitariamente equivalente a la representación del campo escalar sin masa.

Vamos a considerar ahora la siguiente transformación canónica lineal

$$\varphi = F(t)\phi, \quad P_\varphi = \frac{P_\phi}{F(t)} + G(t)\sqrt{\bar{\Omega}}\phi, \quad (4.4.1)$$

que se corresponde con un re-escalado del campo por una función dependiente del tiempo $F(t)$, junto con el re-escalado inverso de su momento y la adición de una contribución lineal del campo, multiplicada por otra función $G(t)$ y densitizada correctamente con la raíz cuadrada del determinante de la métrica espacial $\bar{\Omega}$. Para preservar la estructura diferencial de nuestra teoría de campos y evitar posibles singularidades, asumiremos que F y G son dos funciones reales diferenciables, y además que F es distinta de cero para todo tiempo $t \in \mathbb{I}$. Dado que F y G sólo dependen del tiempo, las simetrías $SO(4)$ de la ecuación de campo se preservan.

Por conveniencia, vamos a separar esta transformación en dos partes: i) una primera transformación constante, que absorbe los valores iniciales $F_0 = F(t_0)$ y $G_0 = G(t_0)$, y ii) una segunda parte que contiene toda la dependencia temporal, y que coincide con la identidad al tiempo inicial t_0 . Más explícitamente, tendríamos una transformación constante

$$\tilde{\varphi} = F_0\varphi, \quad P_{\tilde{\varphi}} = \frac{P_\varphi}{F_0} + G_0\sqrt{\bar{\Omega}}\varphi, \quad (4.4.2)$$

y una transformación variable en el tiempo de la forma (4.4.1)

$$\varphi = f(t)\phi, \quad P_\varphi = \frac{P_\phi}{f(t)} + g(t)\sqrt{\bar{\Omega}}\phi, \quad (4.4.3)$$

en donde las funciones $f(t)$ y $g(t)$ toman los valores iniciales $f(t_0) = 1$ y $g(t_0) = 0$.

La transformación lineal (4.4.2) no tiene un impacto significativo en nuestra discusión. Si para el par canónico (φ, P_φ) somos capaces de encontrar una cuantización invariante bajo el grupo $SO(4)$ que admite una evolución unitaria, entonces uno obtiene una cuantización con las mismas características para el par transformado $(\tilde{\varphi}, P_{\tilde{\varphi}})$ por simple linealidad. Por tanto, no se añade ambigüedad alguna con este tipo de transformaciones. Así que vamos a concentrarnos en la familia de transformaciones canónicas (4.4.3) con condiciones iniciales fijas. Vamos a demostrar que este tipo de transformaciones, excepto la identidad, da lugar a una dinámica que no admite una implementación unitaria respecto a ninguna representación invariante bajo el grupo de transformaciones $SO(4)$. En consecuencia, nuestros criterios de unicidad restringen también la descripción de campo adoptada.

4.4.2. Dinámica clásica

Recordemos que la transformación dada en la Ec. (4.4.3) preserva la invariancia bajo el grupo $SO(4)$ de las ecuaciones de campo, y que ambas funciones $f(t)$ y $g(t)$ son diferenciables. Además $f(t)$ es distinta de cero en todo momento, propiedad que hereda de $F(t)$. En consecuencia, el signo de $f(t)$ es constante, y puesto que su valor inicial ha sido elegido igual a la unidad, deducimos que $f(t) > 0 \forall t \in \mathbb{I}$.

La transformación canónica (4.4.3) depende del tiempo, por lo que la dinámica asociada al par canónico (φ, P_φ) será diferente de la original relacionada con (ϕ, P_ϕ) . Para describir la dinámica, vamos a seguir el mismo procedimiento de la Sección 4.1. Después de llevar a cabo una descomposición en modos armónicos en la tres-esfera (véase el Apéndice B), y de introducir las variables de creación y destrucción a través de las relaciones (4.1.20), puede verse que las matrices de evolución $\mathcal{U}_n(t, t_0)$ que aparecen en la Ec. (4.1.22), de coeficientes (4.1.24) y (4.1.25), son reemplazadas por las nuevas matrices 2×2

$$\tilde{\mathcal{U}}_n(t, t_0) = \mathcal{T}_n(t) \mathcal{U}_n(t, t_0), \quad (4.4.4)$$

donde

$$\mathcal{T}_n(t) = \mathcal{T}_n(t) = \begin{pmatrix} f_+(t) + i \frac{g(t)}{2\omega_n} & f_-(t) + i \frac{g(t)}{2\omega_n} \\ f_-(t) - i \frac{g(t)}{2\omega_n} & f_+(t) - i \frac{g(t)}{2\omega_n} \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

es independiente de t_0 , de ℓ y de m , y donde $2f_\pm(t) = f(t) \pm 1/f(t)$. Un cálculo muy sencillo nos permite obtener los nuevos coeficientes de Bogoliubov $\tilde{\alpha}_n(t)$ y $\tilde{\beta}_n(t)$ de las matrices de evolución $\tilde{\mathcal{U}}_n(t, t_0)$. Esos coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n(t) &= \tilde{\alpha}_n(t) = f_+(t)\alpha_n(t) + f_-(t)\beta_n^*(t) + i \frac{g(t)}{2\omega_n} [\alpha_n(t) + \beta_n^*(t)], \\ \tilde{\beta}_n(t) &= \tilde{\beta}_n(t) = f_+(t)\beta_n(t) + f_-(t)\alpha_n^*(t) + i \frac{g(t)}{2\omega_n} [\alpha_n^*(t) + \beta_n(t)]. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

En esta última relación, resaltamos el hecho de que todas las cantidades son independientes de las etiquetas ℓ y m . Por ello, de ahora en adelante, utilizaremos el subíndice n en vez de \mathbf{n} , a menos que sea necesario tener en cuenta el triplete de etiquetas.

4.4.3. Representaciones de Fock invariantes $SO(4)$ y condiciones de unitariedad

Según vimos en la Sección 4.3.1 haciendo uso de lema de Schur [131], todas las estructuras complejas j invariantes $SO(4)$ se relacionan con la estructura compleja

asociada al caso sin masa, j_0 , mediante una identidad del tipo $j = \mathcal{K}j_0\mathcal{K}^{-1}$ donde \mathcal{K} es una transformación simpléctica que es diagonal por bloques 2×2 . Cada bloque \mathcal{K}_n [véase la Ec. (4.3.7)] está determinado por dos números complejos κ_n y λ_n , sujetos a la condición $|\kappa_n|^2 - |\lambda_n|^2 = 1$. Recordamos también que las matrices \mathcal{K}_n son las mismas para todos los modos con el mismo valor de n .

Por otra parte, como discutimos en la Sección 4.3.2, una implementación unitaria respecto de j de las transformaciones dinámicas descritas por $\tilde{\mathcal{U}}_n(t, t_0)$ implica que la imagen inversa de dichas transformaciones bajo \mathcal{K} admite una implementación unitaria respecto de la estructura compleja j_0 . Haciendo uso de la transformación $\mathcal{T}_n(t)$ definida en la Ec. (4.4.5) para obtener $\tilde{\mathcal{U}}_n(t, t_0)$, llegamos a las matrices

$$\tilde{\mathcal{U}}_n^j(t, t_0) = \mathcal{K}_n \tilde{\mathcal{U}}_n(t, t_0) \mathcal{K}_n^{-1}, \quad (4.4.7)$$

cuyos coeficientes de Bogoliubov son

$$\tilde{\alpha}_n^j(t, t_0) = |\kappa_n|^2 \tilde{\alpha}_n(t, t_0) - |\lambda_n|^2 \tilde{\alpha}_n^*(t, t_0) + 2i\Im[\kappa_n^* \lambda_n^* \tilde{\beta}_n(t, t_0)], \quad (4.4.8)$$

$$\tilde{\beta}_n^j(t, t_0) = (\kappa_n^*)^2 \tilde{\beta}_n(t, t_0) - \lambda_n^2 \tilde{\beta}_n^*(t, t_0) + 2i\kappa_n^* \lambda_n \Im[\tilde{\alpha}_n(t, t_0)], \quad \forall t \in \mathbb{I}. \quad (4.4.9)$$

Recordamos que $\tilde{\alpha}_n(t, t_0)$ y $\tilde{\beta}_n(t, t_0)$ están dados en la Ec. (4.4.6) en términos de sus análogos originales $\alpha_n(t, t_0)$ y $\beta_n(t, t_0)$. Con ello, la condición necesaria y suficiente para la implementación unitaria de la dinámica respecto de la representación determinada por j es en nuestro caso

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)|^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{I}. \quad (4.4.10)$$

Esto es, la secuencia $\{n\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)\}$ debe ser de cuadrado sumable para todo $t \in \mathbb{I}$.

4.4.4. Demostración de la unicidad bajo reparametrizaciones del campo

En esta sección vamos a demostrar que los criterios de unicidad presentados en esta tesis no sólo seleccionan una clase de equivalencia para la representación de Fock de un campo de Klein-Gordon con masa variable en el tiempo (véase Sección 4.3), sino que además eliminan cualquier descripción alternativa del campo que pueda alcanzarse mediante una transformación canónica lineal dependiente del tiempo en la que se re-escala dicho campo. En otras palabras, la única transformación canónica de la forma (4.4.3) que es aceptable es la identidad.

Asumamos pues de ahora en adelante que la condición de unitariedad se satisface. Consecuentemente, las secuencias $\{n\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)\}$ son de cuadrado sumable para todos los

valores de t en el intervalo \mathbb{I} considerado. En particular, esto requiere que los términos $n\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)$ de estas secuencias tiendan a cero en el límite $n \rightarrow \infty$.¹ Como n y $|\kappa_n|$ son mayores que la unidad, los coeficientes $\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)/(\kappa_n^*)^2$ también deben tender a cero para n suficientemente grande. Teniendo en cuenta los comportamientos asintóticos de los coeficientes de Bogoliubov $\alpha_n(t, t_0)$ y $\beta_n(t, t_0)$, que aparecen en las Ecs. (4.1.26) y (4.1.27), y recordando que $z_n = \lambda_n/\kappa_n^*$ y $\tau = t - t_0$, concluimos que

$$[e^{in\tau} - z_n^2 e^{-in\tau}] f_-(t) - 2iz_n \sin(n\tau) f_+(t) \quad (4.4.11)$$

debe de tener un límite nulo cuando $n \rightarrow \infty$ para todos los valores de $t \in \mathbb{I}$. En la expresión anterior hemos empleado que $\omega_n = n + O(n^{-1})$.

Separemos la parte real y la parte imaginaria de la Ec. (4.4.11). Esto nos proporciona dos secuencias reales que deben tender a cero para $n \rightarrow \infty$ y $\forall t \in \mathbb{I}$. Explícitamente, estas dos secuencias están formadas por los elementos

$$(2\Im[z_n] f_+(t) - \Im[z_n^2] f_-(t)) \sin(n\tau) + (1 - \Re[z_n^2]) f_-(t) \cos(n\tau) \quad (4.4.12)$$

y

$$(\{1 + \Re[z_n^2]\} f_-(t) - 2\Re[z_n] f_+(t)) \sin(n\tau) - \Im[z_n^2] f_-(t) \cos(n\tau). \quad (4.4.13)$$

Demostración de la unicidad frente a re-escalados dependientes del tiempo

Podemos aplicar ahora los argumentos de las Refs. [35, 113, 114] y probar que, si es cierto que las secuencias dadas en las Ecs. (4.4.12) y (4.4.13) tienden a cero para todos los valores del tiempo, entonces no es posible que las dos secuencias

$$1 - \Re[z_n^2] \quad \text{y} \quad \Im[z_n^2] \quad (4.4.14)$$

tengan simultáneamente un límite nulo en cualquier subsecuencia (infinita) de números enteros positivos $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ mayores que la unidad, o, lo que es lo mismo, para $n \in \mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Vamos a ver esto en más detalle.

Primero mostramos que $(\Re[z_n])^2$ tiende a la unidad si los dos términos en la Ec. (4.4.14) tienden a cero. Esto se puede comprobar sumando el cuadrado de esos dos términos, lo que resulta en

$$(1 - |z_n|^2)^2 + 4(\Im[z_n])^2. \quad (4.4.15)$$

Según nuestra hipótesis, esta expresión tiende a cero en una subsecuencia dada \mathbb{M} . Por tanto, nos encontramos con que $|z_n|$ debe tender a la unidad y $\Im[z_n]$ a cero en esta subsecuencia, lo que implica que el límite de $(\Re[z_n])^2$ es igual a 1.

¹Este requisito es necesario pero no suficiente respecto a la sumabilidad de las secuencias $\{n^2|\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)|^2\}$, aunque bastará para demostrar nuestro resultado.

Supongamos entonces que realmente existe una secuencia particular $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ tal que los términos (4.4.14) tienden a cero para todos los posibles valores del tiempo. Dado que el factor

$$f_{-}(t) \cos(n\tau), \quad (4.4.16)$$

que multiplica a $\Im[z_n^2]$ en la Ec. (4.4.13) está acotado para cualquier valor particular de t , concluimos que

$$\left(\{1 + \Re[z_n^2]\} f_{-}(t) - 2\Re[z_n] f_{+}(t) \right) \sin(n\tau) \quad (4.4.17)$$

debe tener un límite nulo en \mathbb{M} , $\forall t \in \mathbb{I}$. Además, dado que por hipótesis $1 - \Re[z_n^2]$ tiende a cero en \mathbb{M} también, el resultado al que llegamos es que

$$(f_{-}(t) - \Re[z_n] f_{+}(t)) \sin(n\tau) \quad (4.4.18)$$

debe de tender a cero en \mathbb{M} para cada posible valor del tiempo t .

Pero hemos visto que, con nuestras hipótesis, $(\Re[z_n])^2$ necesariamente tiende a la unidad en \mathbb{M} . Entonces, existe al menos una subsecuencia $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$ tal que $\Re[z_n]$ tiende a 1 ó -1 en \mathbb{M}' . En cualquiera de estos casos, como \mathbb{M}' es una subsecuencia de \mathbb{M} , y por tanto la Ec. (4.4.18) debe de tender a cero en \mathbb{M}' , concluimos (haciendo uso de la definición de f_{\pm}) que bien

$$\sin(n\tau)f(t) \quad \text{ó} \quad \frac{\sin(n\tau)}{f(t)} \quad (4.4.19)$$

(o ambas) tiene un límite nulo en la subsecuencia $\mathbb{M}' \subset \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{I}$. Como la función $f(t)$ es continua y distinta de cero para todo t , esto implica que $\sin(n\tau)$ debe tender a cero en \mathbb{M}' para todos los valores posibles de $t \in \mathbb{I}$, o equivalentemente $\forall \tau \in \bar{\mathbb{I}}$ (donde $\bar{\mathbb{I}}$ es el dominio que se obtiene de desplazar \mathbb{I} por la constante t_0).

No obstante, haciendo uso de los resultados del Apéndice C, concluimos que la función $\sin(n\tau)$ no puede tender a cero en ninguna subsecuencia $\forall t \in \mathbb{I}$. Por tanto, podemos excluir la posibilidad de que las dos secuencias independientes del tiempo de la Ec. (4.4.14) tiendan simultáneamente a cero en una subsecuencia $\mathbb{M}' \subset \mathbb{N}$.

Vamos a hacer uso de este resultado para ver que la función $f(t)$ necesariamente debe ser una función constante (y, por ello, igual a la unidad, que es su valor inicial). Consideremos las secuencias reales que aparecen en las Ecs. (4.4.12) y (4.4.13) y recordemos que, según nuestra hipótesis de partida, ambas deben tener un límite nulo cuando $n \rightarrow \infty$ para todos los valores posibles del tiempo $t \in \mathbb{I}$.

Concentramos la atención en un subconjunto específico de valores del tiempo (desplazado) τ : todos los valores de la forma $\tau = 2\pi q/p$ donde q y p pueden tomar cualquier valor entero positivo, exceptuando aquellos casos en los que el valor de τ cae fuera de

su intervalo de definición $\bar{\mathbb{I}}$. Ahora, para cada valor de p , tomamos la subsecuencia de enteros positivos

$$\mathbb{M}_p = \{n = kp > 1, k \in \mathbb{N}^+\}. \quad (4.4.20)$$

Entonces, una vez fijado p , los términos de (4.4.12) y (4.4.13) tienden a cero en la subsecuencia \mathbb{M}_p cuando $n \rightarrow \infty$ para todos los valores de τ que se obtienen al variar q . Llegamos así a la conclusión de que

$$(1 - \Re [z_{kp}^2]) f_- \left(t_0 + \frac{2\pi q}{p} \right) \quad (4.4.21)$$

y

$$\Im [z_{kp}^2] f_- \left(t_0 + \frac{2\pi q}{p} \right) \quad (4.4.22)$$

deben de tender ambos a cero cuando k va a infinito. El límite debe ser nulo para todos y cada uno de los valores posibles de p y q . Ahora bien, los factores que no dependen del tiempo a la izquierda de esas expresiones son precisamente aquéllos que aparecen en la Ec. (4.4.14), y que probamos que no podían tender a cero simultáneamente en ninguna subsecuencia de enteros positivos, en particular en \mathbb{M}_p para cada valor de p . Consecuentemente, la única posibilidad que queda es que la función $f_-(t_0 + 2\pi q/p)$ sea cero para todos los valores posibles de q y p . Empleando que $f(t) > 0 \forall t \in \mathbb{I}$, el resultado anterior implica que

$$f \left(t_0 + \frac{2\pi q}{p} \right) = 1 \quad \forall p, q. \quad (4.4.23)$$

Dado que el subconjunto de valores del tiempo $t \in \{t_0 + 2\pi q/p\}$ es denso en $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, y que la función $f(t)$ es continua, llegamos entonces a la conclusión de que $f(t)$ es la función unidad en todo su dominio.

Demostración de la unicidad frente a redefiniciones del momento

Falta por demostrar que la función $g(t)$ en la transformación (4.4.3) debe anularse, bajo las hipótesis de invariancia $SO(4)$ y dinámica unitaria. Veamos primero que, una vez tenemos en cuenta que necesariamente $f(t) = 1$, la secuencia $\{z_n\}$ debe tender a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Si introducimos $f(t) = 1$ en la Ec. (4.4.11), es posible comprobar que las secuencias $\{z_n \sin(n\tau)\}$ deben tender a cero $\forall \tau \in \bar{\mathbb{I}}$. De nuevo, haciendo uso de los resultados del Apéndice C, podemos asegurar que la función $\sin(n\tau)$ no puede tender a cero en ninguna subsecuencia de enteros positivos para todos los valores de τ en un intervalo compacto. La única posibilidad restante es que z_n tenga un límite nulo. Con esto y la relación $|\kappa_n|^2 = |\lambda_n|^2 + 1$, es sencillo probar que λ_n debe tender a cero

y que $1/|\kappa_n|^2$ (y $|\kappa_n|^2$) tienen un límite igual a 1 cuando $n \rightarrow \infty$. En consecuencia, la secuencia $\{\kappa_n\}$ está acotada.

Nuestra demostración se puede completar considerando las secuencias $\{n\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)\}$, particularizadas a $f(t) = 1$, lo que implica que $f_+(t) = 1$ y $f_-(t) = 0$. Empleando la definición (4.4.9) de $\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)$, puede comprobarse que los términos dominantes en este coeficiente son

$$\tilde{\beta}_n^j(t, t_0) \cong \beta_n^j(t, t_0) + i \frac{g(t)}{2\omega_n} [(\kappa_n^*)^2 \alpha_n^*(t, t_0) + \lambda_n^2 \alpha_n(t, t_0)]. \quad (4.4.24)$$

Nuestra hipótesis de implementación unitaria de la dinámica requiere que la secuencia formada por $n\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)$ tienda a cero en el límite $n \rightarrow \infty$ para todos los valores del tiempo, y lo mismo debe suceder con los términos $n\tilde{\beta}_n^j(t, t_0)/(\kappa_n^*)^2$. Usando esta condición y teniendo en cuenta los límites asintóticos (4.1.26) y (4.1.27), así como que λ_n tiende a cero y n/ω_n tiende a la unidad para n suficientemente grande, un cálculo muy simple nos confirma que las secuencias

$$g(t) - 4nz_n \sin(n\tau) e^{-in\tau} \quad (4.4.25)$$

deben anularse en el límite $n \rightarrow \infty$, $\forall t \in \mathbb{I}$. Consideremos la parte real e imaginaria de estas secuencias, es decir

$$g(t) - 4n|z_n| \sin(n\tau) \cos(n\tau - \delta_n) \quad (4.4.26)$$

y

$$4n|z_n| \sin(n\tau) \sin(n\tau - \delta_n), \quad (4.4.27)$$

donde hemos separado los números complejos z_n en su módulo y su fase:

$$z_n = |z_n| e^{i\delta_n}. \quad (4.4.28)$$

Aunque sabemos que $|z_n|$ tiende a cero, el límite del producto $n|z_n|$ está todavía indeterminado.

Supongamos en primer lugar que la secuencia $\{n|z_n|\}$ tiende a cero. En este caso, y recordando que las secuencias en la Ec. (4.4.26) deben tender a cero $\forall t \in \mathbb{I}$, se sigue inmediatamente que $g(t)$ debe anularse en el dominio \mathbb{I} , como queríamos demostrar. Sólo nos resta probar que la posibilidad alternativa, en la que $\{n|z_n|\}$ no tiende a cero, da lugar a una contradicción. Usemos ahora el hecho de que las secuencias formadas por los términos (4.4.27) tienen un límite nulo $\forall t$. Si $\{n|z_n|\}$ no tiende a cero, debe existir una subsecuencia \mathbb{M} de enteros positivos tal que la secuencia $\{n|z_n|\}$ está acotada inferiormente en \mathbb{M} . Entonces, en esa subsecuencia,

$$\sin(n\tau) \sin(n\tau - \delta_n) \quad (4.4.29)$$

necesariamente debe tener un límite nulo $\forall \tau \in \mathbb{I}$. Pero, de nuevo, los resultados del Apéndice C nos aseguran que esto es imposible. En consecuencia, el único escenario permitido es que $g(t) = 0$.

Resumiendo, hemos sido capaces de probar que la única transformación canónica del tipo (4.4.3) compatible con nuestros criterios de unicidad es la identidad. De este modo, solamente existe una elección posible de par canónico para describir el sistema una vez se aceptan los criterios de invariancia respecto del grupo de simetrías asociadas a las ecuaciones de movimiento –que en nuestro caso es el grupo $SO(4)$ – y una implementación unitaria de la dinámica.

4.5. Conclusiones

La carencia de criterios para seleccionar de forma única una descripción cuántica de una teoría de campos en un espaciotiempo curvo introduce serias dudas sobre la validez de sus predicciones. Si los espaciotiempos sobre los que se propagan los campos tienen alguna simetría, es natural pensar que la teoría cuántica de campos la incorporará de alguna forma. La manera en que se suele proceder es requerir la invariancia bajo esa simetría de las estructuras matemáticas que definen la representación cuántica, siempre y cuando esto se pueda llevar a cabo. En casos en que no sea posible exigir invariancia respecto a un grupo de transformaciones que corresponden a cierta simetría, cabría esperar al menos que tales transformaciones admitan una implementación unitaria dentro de la teoría cuántica.

En nuestro caso, nos hemos interesado especialmente por campos que se propagan en espaciotiempos no estacionarios, como ocurre por ejemplo en escenarios cosmológicos. Allí, los espaciotiempos típicos suelen ser homogéneos e isótropos, y poseen un grupo bien determinado de isometrías espaciales. Este tipo de teorías de campos en espaciotiempos no estacionarios usualmente admite una descripción, al menos en el nivel clásico, en la que el campo (re-escalado adecuadamente) se propaga en un espaciotiempo estático sujeto a un potencial cuadrático dependiente del tiempo. En este capítulo hemos revisando justamente la cuantización de un campo escalar de tipo Klein-Gordon en un espaciotiempo estático con secciones espaciales compactas con la topología de una tres-esfera, pero sujeto a un potencial dependiente del tiempo (véase la Sección 4.1). En la Sección 4.1.1 hemos dado una descomposición del campo en modos, usando la base de armónicos hiperesféricos. Hemos realizado un estudio de la dinámica clásica en la Sección 4.1.2, centrándonos en su límite ultravioleta. En la Sección 4.2 hemos estudiado la representación asociada naturalmente al campo escalar sin masa, que justamente proporciona una cuantización invariante bajo el grupo de transformaciones $SO(4)$ (lo

que permite implementarlo unitariamente de forma directa). Hemos visto también que, aunque no es invariante bajo las transformaciones generadas por la dinámica clásica, ese conjunto de transformaciones admite aun así una implementación unitaria en esta representación cuántica. Además, en la Sección 4.3, hemos caracterizado el conjunto de representaciones de Fock que son invariantes bajo las transformaciones asociadas al grupo $SO(4)$, y mostrado qué tipo de transformaciones simplécticas son las que nos permiten relacionarlas con la representación de partida del campo escalar sin masa. En esa sección repasamos la demostración de que cualquier representación invariante bajo el grupo $SO(4)$, y que admite una implementación unitaria de la dinámica, es unitariamente equivalente a la representación de partida.

Estos resultados son robustos, pero se basan en una elección a priori de los campos canónicos ϕ y P_ϕ . Aún nos restaba por saber si, al utilizar otra descripción de campo, como la que surge al introducir una transformación canónica dependiente del tiempo en la que el campo se re-escala, la representación cuántica asociada admite los mismos criterios de unicidad sobre invariancia y unitariedad, y si dicha descripción cuántica es unitariamente equivalente o no a la original. En la Sección 4.4 hemos estudiado todas estas cuestiones. En más detalle, hemos considerado una transformación canónica dependiente del tiempo que consiste en un re-escalado del campo, el inverso aplicado al momento canónicamente conjugado y adicionalmente una contribución lineal del campo proporcional a una función de tiempo dada (véase la Sección 4.4.1). Esta transformación modifica la dinámica de partida, como hemos comentado en la Sección 4.4.2, pero preserva las simetrías del espaciotiempo, es decir, el conjunto de transformaciones que se identifica con el grupo $SO(4)$. Siguiendo los argumentos de la Sección 4.1, nos hemos preguntado si existe alguna representación invariante bajo esas transformaciones que admita una implementación unitaria de la dinámica (véase la Sección 4.4.3). La conclusión a la que hemos llegado en la Sección 4.4.4 es que no. La descripción de campo de partida es la única compatible con los criterios de invariancia y unitariedad en la evolución, si se consideran redefiniciones en el espacio de fases por medio de transformaciones canónicas puramente dependientes del tiempo y en las que la configuración del campo se re-escala.

Para llegar a estos resultados de unicidad hemos requerido solamente que la función de masa dependiente del tiempo $s(t)$ que aparece en la ecuación de movimiento (4.1.3) posea una primera derivada que sea integrable en cualquier subintervalo compacto de su dominio de definición \mathbb{I} . Dado lo poco restrictivo de estos requisitos, nuestros criterios de unicidad tienen aplicación en una amplia gama de escenarios cosmológicos. En esos casos, la situación general que uno encuentra es que, a la hora de cuantizar un campo escalar en un espaciotiempo no estacionario siguiendo los criterios presentados en esta tesis, se introduce en primer lugar un re-escalado del mismo que permite pasar a una

descripción correspondiente un campo en un espaciotiempo estático auxiliar, aunque la evolución queda sujeta a un potencial cuadrático dependiente de tiempo. Imaginemos que nuestro campo original es φ , con una función de masa asociada dependiente del tiempo $\tilde{s}(t)$. En la ecuación de campo, además, aparecerá un término lineal en $\dot{\varphi}$, que se identifica con un amortiguamiento debido a la interacción del campo con el fondo cosmológico, y que es proporcional a una cierta función $r(t)$ dependiente del tiempo. Si ahora introducimos un re-escalado por una función $F(t)$ [véase la Ec. (4.4.1)], esto es, $\phi = \varphi/F(t)$, un cálculo muy sencillo nos permite ver que el re-escalado, efectivamente, absorbe el término de amortiguamiento si

$$F(t) = F_0 \exp \left[- \int_{t_0}^t d\tau \frac{r(\tau)}{2} \right], \quad (4.5.1)$$

y conduce a una nueva función de masa

$$s(t) = \tilde{s}(t) - \frac{[r^2(t) + 2\dot{r}(t)]}{4}. \quad (4.5.2)$$

Por tanto, para que $s(t)$ cumpla las condiciones que aseguran la aplicabilidad de nuestros criterios de unicidad basta, por ejemplo, que $\tilde{s}(t)$ las satisfaga y además $r(t)$ tenga una derivada segunda que sea integrable en cualquier subintervalo compacto de su dominio de definición.

Capítulo 5

Extensión de los resultados de unicidad a topologías compactas generales

Este capítulo es esencialmente una extensión de los resultados obtenidos en el Capítulo 4 para aplicar los criterios de unicidad a campos escalares que se propagan en un espaciotiempo estático de secciones espaciales con topología compacta arbitraria y con una masa dependiente del tiempo genérica. En la Sección 5.1 estudiaremos la descripción clásica del sistema. Su representación cuántica será analizada en la Sección 5.2. En las Secciones 5.3 y 5.4 discutiremos los criterios de unicidad y demostraremos que sólo existe una elección de variables canónicas y una única representación de Fock para ellas (salvo equivalencia unitaria) invariante bajo las isometrías espaciales en que la dinámica es implementable unitariamente. En la Sección 5.5 discutimos los resultados, y las consecuencias que de ellos se derivan.

5.1. Dinámica clásica y descomposición en modos

Vamos a considerar de nuevo un campo escalar real ϕ que se propaga en un espaciotiempo estático globalmente hiperbólico, asumiendo que tiene una topología de la forma $\mathbb{I} \times \Sigma$, con \mathbb{I} de nuevo un intervalo temporal dado, y donde Σ es una variedad riemanniana compacta *arbitraria* equipada con una métrica h_{ab} .

El campo satisface una ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} - \Delta\phi + s(t)\phi = 0, \tag{5.1.1}$$

donde Δ es el operador de Laplace-Beltrami asociado a las secciones espaciales Σ ,

correspondiente a la métrica h_{ab} , y $s(t)$ es una función de masa dependiente del tiempo por lo demás arbitraria (aunque sujeta a las condiciones que especificamos en el Capítulo 4). La derivada respecto al tiempo $t \in \mathbb{I}$ se indica con un punto sobre la función considerada.

El espacio de fases canónico del sistema Γ se determina a partir de los datos iniciales $(\phi, P_\phi) = (\phi|_{t_0}, \sqrt{h}\dot{\phi}|_{t_0})$ para un tiempo cualquiera t_0 , donde h es el determinante de h_{ab} . Este espacio de fases está dotado con una forma simpléctica Ω que coincide formalmente con la definición de la Ec. (4.1.4), pero realizando las integrales en las secciones Σ . De ella se deducen los corchetes de Poisson

$$\{\phi(t_0, x), P_\phi(t_0, y)\} = \delta(x - y), \quad (5.1.2)$$

que no dependen de t_0 , y donde $\delta(x - y)$ es la delta de Dirac en Σ .

Las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{P}_\phi = \sqrt{h} [\Delta\phi - s(t)\phi], \quad \dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{h}} P_\phi, \quad (5.1.3)$$

combinadas adecuadamente, son equivalentes a la Ec. (5.1.1). Asumimos que la ecuación de movimiento (5.1.1) tiene asociado un grupo de simetrías G , de forma análoga a las simetrías que aparecían en la tres-esfera y que formaban el grupo $SO(4)$ (véase la Sección 4.1).

Para estudiar este sistema, es muy conveniente realizar una expansión de los campos ϕ y P_ϕ en modos del operador de Laplace-Beltrami. Las propiedades del operador Δ en topologías compactas [134, 135] nos aseguran que existe un conjunto numerable $\{\Psi_{n,l}\}$ de autofunciones ortonormales reales del operador de Laplace-Beltrami que proporciona una base del espacio de funciones en Σ con cuadrado integrable respecto del elemento de volumen construido con la métrica h_{ab} . Estas autofunciones tienen autovalores $\{-\omega_n^2\}$, ordenados de forma que ω_n^2 crece monótonamente con n , donde $n = 1, 2, \dots$ es un número natural. Además, ω_n^2 tiende a infinito cuando $n \rightarrow \infty$. En general, puede existir cierta degeneración en cada autovalor, de modo que asumiremos que los espacios propios del operador Δ tienen una dimensión g_n mayor o igual a la unidad (y necesariamente finita). Esta degeneración la tiene en cuenta la etiqueta $l = 1, \dots, g_n$.¹ Al descomponer cualquier función como combinación lineal de las autofunciones del operador de Laplace-Beltrami, la suma debe contener también dicha etiqueta. En el caso de nuestro campo escalar,

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{g_n} q_{n,l} \Psi_{n,l}. \quad (5.1.4)$$

¹En el caso de la tres-esfera, las etiquetas ℓ y m desempeñaban el mismo papel que ahora toma la etiqueta l .

De este modo, podemos identificar los grados de libertad del sistema con el conjunto numerable de funciones reales $q_{n,l}$, las cuales satisfacen un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden desacopladas:

$$\ddot{q}_{n,l} + [\omega_n^2 + s(t)]q_{n,l} = 0. \quad (5.1.5)$$

Vemos que todos los modos con el mismo n satisfacen la misma ecuación de movimiento, independientemente de la etiqueta l .

El espacio de configuración \mathcal{Q} adquiere la correspondiente descomposición como suma directa:

$$\mathcal{Q} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}^n, \quad \mathcal{Q}^n = \bigoplus_{l=1}^{g_n} \mathcal{Q}_l^n, \quad (5.1.6)$$

donde cada subespacio \mathcal{Q}^n tiene dimensión g_n , mientras que los subespacios \mathcal{Q}_l^n son unidimensionales.

En cuanto al momento canónicamente conjugado, admite una descomposición similar en modos, pero sin olvidar que se trata de una densidad escalar. Un cálculo sencillo muestra que los coeficientes de la expansión satisfacen $p_{nl} = \dot{q}_{nl}$. Asimismo, por medio de las relaciones de ortonormalidad de los armónicos, los corchetes de Poisson (5.1.2) equivalen a

$$\{q_{n,l}, p_{n',l'}\} = \delta_{nn'} \delta_{ll'}, \quad (5.1.7)$$

por lo que $q_{n,l}$ y $p_{n,l}$ forman un conjunto completo de variables canónicas. Del mismo modo que \mathcal{Q}^n , su análogo en el espacio de momentos \mathcal{P}^n admite una descomposición $\mathcal{P}^n = \bigoplus_{l=1}^{g_n} \mathcal{P}_l^n$. En conclusión el espacio de fases se puede descomponer en la forma

$$\Gamma = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Gamma^n, \quad \Gamma^n = \mathcal{Q}^n \oplus \mathcal{P}^n. \quad (5.1.8)$$

En cuanto a la dinámica del sistema, el análisis llevado a cabo en la Sección 4.1.2 para secciones espaciales isomorfas a tres-esferas se puede aplicar directamente al sistema que estamos estudiando. Basta con sustituir ω_n , que allí se correspondía con la raíz cuadrada de $n^2 - 1$, por la raíz cuadrada del correspondiente autovalor del operador $(-\Delta)$ asociado a la variedad espacial Σ . Por ello, no vamos a repetir el estudio ya realizado allí. Por otra parte, con la vista puesta en la cuantización de Fock (canónica) que hemos adoptado en esta tesis, es conveniente de nuevo introducir las variables de creación y destrucción

$$a_{n,l} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (\omega_n q_{n,l} + i p_{n,l}), \quad a_{n,l}^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (\omega_n q_{n,l} - i p_{n,l}). \quad (5.1.9)$$

Esta elección no está bien definida para aquellos modos con autovalor $\omega_n = 0$ (ceromodos). Pero en caso de que exista un espacio propio asociado a ese autovalor, su dimensión siempre será finita, por lo que nuestro análisis sobre el comportamiento del sistema en teoría de campos no se verá afectado si excluimos del mismo ese número finito de grados de libertad. Por ello, simplemente, los omitiremos de ahora en adelante, asumiendo que se cuantizan de forma separada mediante técnicas, no por qué convencionales, de mecánica cuántica.

La dinámica clásica en esta formulación canónica está determinada por una transformación de Bogoliubov similar a la que aparece en la Ec. (4.1.21) pero adaptada a esta nueva situación. Dicha transformación se puede describir mediante matrices de evolución 2×2 de coeficientes $\alpha_{n,l}(t, t_0)$ y $\beta_{n,l}(t, t_0)$, donde los operadores de destrucción a tiempo t_0 (para n y l dados) evolucionan a un tiempo $t \in \mathbb{I}$ a través de la transformación

$$a_{n,l}(t) = \alpha_{n,l}(t, t_0)a_{n,l}(t_0) + \beta_{n,l}(t, t_0)a_{n,l}^*(t_0). \quad (5.1.10)$$

Para los operadores de creación $a_{n,l}^*(t)$ se obtiene una relación equivalente tomando el complejo conjugado de la expresión anterior [véanse las Ecs. (4.1.21) y (4.1.22)]. Los coeficientes $\alpha_{n,l}(t, t_0)$ y $\beta_{n,l}(t, t_0)$ sólo dependen de ω_n , y no de la etiqueta l , al igual que ocurre con las ecuaciones de movimiento (5.1.5). Además, por tratarse de una transformación simpléctica, debe satisfacerse que $|\alpha_{n,l}(t, t_0)|^2 = 1 + |\beta_{n,l}(t, t_0)|^2$ para todo $t, t_0 \in \mathbb{I}$ y para todo valor de las etiquetas n y l . En analogía con las Ecs. (4.1.24) y (4.1.25), y empleando las Ecs. (4.1.14) y (4.1.15), nuestros coeficientes se pueden escribir como

$$\alpha_{n,l}(t, t_0) = \alpha_n(t, t_0) = \left[1 + i \frac{W_n(t)}{2\omega_n} \right] \exp \left\{ -i\omega_n(t - t_0) + \int_{t_0}^t d\bar{t} W_n(\bar{t}) \right\}, \quad (5.1.11)$$

$$\beta_{n,l}(t, t_0) = \beta_n(t, t_0) = i \frac{W_n^*(t)}{2\omega_n} \exp \left\{ i\omega_n(t - t_0) + \int_{t_0}^t d\bar{t} W_n^*(\bar{t}) \right\}. \quad (5.1.12)$$

Recordamos que la función $W_n(t)$ es solución de la Ec. (4.1.16) con condición inicial $W_n(t_0) = 0$. Para nuestro análisis, sólo precisaremos conocer la contribución dominante a esta solución en el régimen $\omega_n \rightarrow \infty$. Esta contribución es de la forma $O(1/\omega_n)$, según la Ec. (4.1.19).

5.2. Representación de Fock de campo escalar sin masa y evolución unitaria

Al igual que hicimos en la Sección 4.2, tomaremos la representación de Fock asociada al campo escalar sin masa, que se identifica de forma natural con las variables de destrucción y creación dadas por la Ec. (5.1.9), o equivalentemente con la estructura compleja j_0 definida a partir de

$$j_0(a_{n,l}) = ia_{n,l}, \quad j_0(a_{n,l}^*) = -ia_{n,l}^*. \quad (5.2.1)$$

En el capítulo anterior, donde la variedad Σ estaba particularizada al caso de una tres-esfera, vimos que la estructura compleja j_0 allí definida admitía una implementación unitaria del grupo de traslaciones $SO(4)$, debido a que es invariante bajo la acción de los elementos de ese grupo. En nuestro caso, asumiremos que existe un grupo de simetrías G (en general, isometrías), bajo el cual el operador de Laplace-Beltrami es invariante, lo que inmediatamente se traduce en que la estructura compleja j_0 , dada en (5.2.1), conmuta con todos los elementos del grupo. El conjunto de transformaciones asociadas a dicho grupo admite entonces una implementación unitaria respecto de la representación determinada por j_0 .

Por otra parte, sabemos que la evolución no deja invariante la estructura compleja j_0 . Para ver, no obstante, si las transformaciones dinámicas pueden implementarse de forma unitaria en la representación escogida, debemos dilucidar si la parte antilineal de dichas transformaciones es o no del tipo Hilbert-Schmidt (véase el Capítulo 4.2). Esta condición equivale a que los coeficientes $\beta_{n,l}(t, t_0)$ de las matrices de evolución $\mathcal{U}_{n,l}(t, t_0)$ que determinan la dinámica deben ser de cuadrado sumable [130] en ambos índices n y l , para un tiempo t_0 de referencia dado. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{g_n} |\beta_{n,l}(t, t_0)|^2 < \infty, \quad (5.2.2)$$

para todo $t \in \mathbb{I}$. Puesto que $\beta_{n,l}(t, t_0) = \beta_n(t, t_0)$ para cada n fijo, la condición anterior se reescribe como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{g_n} |\beta_{n,l}(t, t_0)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n |\beta_n(t, t_0)|^2 < \infty, \quad (5.2.3)$$

donde g_n es, de nuevo, la degeneración de cada uno de los valores propios del operador de Laplace-Beltrami, esto es, la dimensión de cada uno de sus subespacios propios.

Esta condición equivale a exigir que la secuencia $\{\sqrt{g_n}\beta_n(t, t_0)\}$ sea de cuadrado sumable. Esta sumabilidad depende del comportamiento de $\beta_n(t, t_0)$ en el límite

asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$. Mediante la Ec. (5.1.12), y recordando que el comportamiento asintótico de la función $W_n(t)$ es del orden de $1/\omega_n$, concluimos que la sumabilidad estudiada se traduce en la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\omega_n^4} < \infty. \quad (5.2.4)$$

Aunque no parezca inmediato, en realidad podemos afirmar que todas las variedades riemannianas de dimensión $d \leq 3$ satisfacen la condición anterior. Esto se puede deducir, por ejemplo, a partir del comportamiento asintótico del espectro del operador de Laplace-Beltrami [134, 135], para el que el número de autofunciones con autovalor (en valor absoluto) menor o igual que cierta cota $\omega^2 \in \mathbb{R}^+$ no crece más rápido que ω^d . En el Apéndice D proporcionamos la demostración de que este comportamiento permite asegurar que la secuencia $\{g_n/\omega_n^4\}$ es sumable.

5.3. Criterios de unicidad de la representación para topologías compactas

Hemos asumido que la ecuación de movimiento (5.1.5) es invariante bajo un cierto grupo de simetrías, que hemos llamado G , ya que el operador Δ lo es. Puesto que vamos a aplicar los mismos criterios de invariancia y unitariedad que nos permitieron llegar a los resultados de unicidad del capítulo anterior, en esta sección vamos a empezar caracterizando las estructuras complejas invariantes bajo el grupo G . Veremos que cualquiera de ellas se puede relacionar con la del campo escalar sin masa (véase la Sección 5.2) a través de una familia de transformaciones simplécticas muy característica. Después, seguiremos las ideas principales de la demostración de la Sección 4.3 para llegar a idénticos resultados de unicidad: toda representación de Fock cuyo estado de vacío sea invariante bajo las isometrías espaciales y que admita una implementación unitaria de la dinámica, pertenece a una misma clase de equivalencia de representaciones de Fock, unitariamente relacionadas entre sí, y donde está incluida la asociada al campo escalar sin masa.

5.3.1. Estructuras complejas invariantes

Restringiremos nuestro estudio a las representaciones invariantes bajo el grupo G , ya que admiten una implementación unitaria de este grupo de simetrías. En particular, la estructura compleja j_0 de la sección anterior define una representación que pertenece

a dicha clase, por estar definida a partir del operador de Laplace-Beltrami, invariante bajo la acción de G .

Para determinar las estructuras complejas que nos interesan, basta con que hagamos uso del lema de Schur [31, 34, 125]. Restringimos primero la acción del grupo G al espacio de configuración \mathcal{Q} . La acción del grupo es unitaria respecto del producto interno correspondiente al elemento de volumen que determina \sqrt{h} , que se asume invariante bajo las simetrías consideradas. Entonces, cada espacio propio del operador de Laplace-Beltrami, Δ , proporciona una representación del grupo G , ya que el grupo de transformaciones conmuta con este operador. Es claro que cada una de estas representaciones (asociada a cada autovalor $-\omega_n^2$) es bien irreducible o se puede descomponer en representaciones irreducibles. Así que, a parte de la descomposición natural del espacio de configuración de la forma $\mathcal{Q} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}^n$, con $\mathcal{Q}^n = \bigoplus_{l=1}^{g_n} \mathcal{Q}_l^n$, existe una descomposición similar, pero en términos de representaciones irreducibles, de \mathcal{Q}^n . Llamaremos \mathcal{Q}_m^n a cada una de dichas representaciones irreducibles, y designaremos su dimensión por $g_{n,m}$, donde, para cada n dado, m es un entero que etiqueta las representaciones irreducibles existentes. Es obvio que $g_{n,m}$ nunca puede ser mayor que g_n , y que la suma en m de $g_{n,m}$ debe ser igual a g_n , la dimensión del espacio propio asociado a $-\omega_n^2$. Puesto que las representaciones irreducibles tienen al menos dimensión 1, tenemos que $1 \leq g_{n,m} \leq g_n$.

En cuanto al espacio de momentos \mathcal{P} , podemos realizar una descomposición similar (recordando de nuevo que los momentos P_ϕ son densidades escalares de peso unidad). Juntando ambas descomposiciones (espacio de configuración y de momentos), obtenemos

$$\Gamma = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Gamma^n = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_m \Gamma_m^n, \quad \Gamma_m^n = \mathcal{Q}_m^n \oplus \mathcal{P}_m^n. \quad (5.3.1)$$

Puesto que el grupo G actúa del mismo modo sobre las variables de configuración ϕ y las de momento P_ϕ , es sencillo darse cuenta de que las representaciones irreducibles asociadas a \mathcal{Q}_m^n y a \mathcal{P}_m^n coinciden.

Una primera aplicación del lema de Schur [131] nos permite afirmar que cualquier estructura compleja invariante bajo la acción de G debe ser diagonal por bloques respecto a la descomposición en representaciones irreducibles del grupo, o en otras palabras, respecto de la descomposición dada en la Ec. (5.3.1), ya que transformaciones invariantes no mezclan representaciones irreducibles. En consecuencia, cualquier estructura compleja invariante bajo el grupo G se descompone de la forma

$$j = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_m j_{n,m}, \quad (5.3.2)$$

donde cada $j_{n,m}$ es una estructura compleja también invariante bajo G pero definida en

el subespacio Γ_m^n . Para cada uno de estos subespacios es siempre posible encontrar una base de variables de configuración y sus correspondientes momentos, obtenidos a partir de una elección adecuada de modos ortonormales del operador de Laplace-Beltrami, como los que introducimos en la Ec. (5.1.4) para expandir el campo.² Tomemos la base $\{q_{n,l}, p_{n,l}\}$ formada por la unión de todas las bases asociadas a cada subespacio Γ_m^n de Γ^n . Ahora, a cada estructura compleja $j_{n,m}$ le corresponde una matriz formada por cuatro bloques: $j_{n,m}^{qq}$, $j_{n,m}^{qp}$, $j_{n,m}^{pq}$ y $j_{n,m}^{pp}$. Cada uno de estos bloques conecta los subespacios que indican los superíndices –por ejemplo, $j_{n,m}^{qp}$ conecta \mathcal{Q}_m^n con \mathcal{P}_m^n –. Las condiciones de invariancia para estos bloques se traducen en condiciones de invariancia para las matrices en la representación irreducible de G considerada. De nuevo, el lema de Schur asegura que esas matrices deben ser proporcionales a la matriz identidad $\mathbb{I}_{n,m}$ de dimensión $g_{n,m} \times g_{n,m}$. Por tanto,

$$j_{n,m}^{qq} = a_{n,m} \mathbb{I}_{n,m}, \quad j_{n,m}^{pq} = b_{n,m} \mathbb{I}_{n,m}, \quad j_{n,m}^{qp} = c_{n,m} \mathbb{I}_{n,m}, \quad j_{n,m}^{pp} = d_{n,m} \mathbb{I}_{n,m}. \quad (5.3.3)$$

Aquí, $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $c_{n,m}$ y $d_{n,m}$ son ciertos números reales (recordemos que la estructura compleja es una aplicación lineal real).

En conclusión, las estructuras complejas invariantes se descomponen en cada sector Γ_m^n en matrices diagonales por bloques, donde cada bloque se identifica con una matriz 2×2 que sólo mezcla $q_{n,l}$ con $p_{n,l}$, para cada valor de n y l fijos, y que varía, en general, cuando n o m cambian.

Para proseguir nuestro estudio es conveniente pasar de la base $\{q_{n,l}, p_{n,l}\}$ a la base de variables de creación y destrucción $\{a_{n,l}, a_{n,l}^*\}$ [véase la Ec. (5.1.9)]. En esta nueva base, vamos a determinar cuál es la relación entre cualquier estructura compleja j invariante bajo el grupo G , y la estructura compleja de partida j_0 asociada a la representación del campo escalar sin masa. Esta relación viene dada por una transformación simpléctica de la forma $j = \mathcal{K} j_0 \mathcal{K}^{-1}$. Es más, teniendo en cuenta la caracterización de estructuras complejas invariantes que hemos discutido, \mathcal{K} es diagonal por bloques:

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_m \mathcal{K}_{n,m}. \quad (5.3.4)$$

Las matrices $\mathcal{K}_{n,m}$ son matrices 2×2 , idénticas en cada subespacio Γ_m^n , y tienen la forma

$$\mathcal{K}_{n,m} = \begin{pmatrix} \kappa_{n,m} & \lambda_{n,m} \\ \lambda_{n,m}^* & \kappa_{n,m}^* \end{pmatrix}, \quad (5.3.5)$$

²En realidad, el análisis de esta subsección, basado en la aplicación del lema de Schur, es válido sólo para representaciones complejas. Cualquier representación genuinamente compleja, no obstante, irá acompañada de su compleja conjugada, y la dinámica de los modos asociados es la misma en ambos casos, ya que las ecuaciones de campo son reales. Tratando este punto con el debido cuidado, puede verse que las conclusiones del resto de nuestra discusión sigue siendo correctas.

con $|\kappa_{n,m}|^2 - |\lambda_{n,m}|^2 = 1$ para todos los posibles valores de n y m , puesto que se trata de una transformación simpléctica.

5.3.2. Condiciones de unitariedad de la dinámica

En la Sección 5.2 vimos que la estructura compleja j_0 , invariante bajo la acción del grupo G , admite una implementación unitaria de la dinámica. Vamos a discutir ahora qué implicaciones tiene la existencia de una implementación unitaria de la dinámica en el caso de otras estructuras complejas j , también invariantes bajo el grupo G .

Recordamos que una transformación simpléctica R tiene implementación unitaria en la representación determinada por $j = \mathcal{K}j_0\mathcal{K}^{-1}$ si y sólo si la transformación $\mathcal{K}^{-1}R\mathcal{K}$ admite una implementación de ese estilo respecto a j_0 . Podemos aplicar esta condición al caso en el que la transformación simpléctica es precisamente la dinámica. Esta transformación viene determinada por el conjunto de matrices $\mathcal{U}_{n,l}(t, t_0) = \mathcal{U}_n(t, t_0)$, que tienen una forma similar a las de la Ec. (4.1.22), pero con coeficientes $\alpha_{n,l}(t, t_0) = \alpha_n(t, t_0)$ y $\beta_{n,l}(t, t_0) = \beta_n(t, t_0)$ dados por las Ecs. (5.1.11) y (5.1.12), respectivamente. Con esta notación queremos enfatizar que esas matrices de evolución coinciden para todos los modos en el mismo espacio propio del operador de Laplace-Beltrami, sin que importe la etiqueta l de degeneración. La representación determinada por j admite pues una implementación unitaria de la dinámica si la transformación que define el conjunto de matrices

$$\mathcal{U}_{n,m}^j(t, t_0) = \mathcal{K}_{n,m}^{-1} \mathcal{U}_n(t, t_0) \mathcal{K}_{n,m} \quad (5.3.6)$$

es unitariamente implementable respecto de j_0 . Un simple cálculo muestra que los coeficientes de $\mathcal{U}_{n,m}^j(t, t_0)$ son

$$\alpha_{n,m}^j(t, t_0) = |\kappa_{n,m}|^2 \alpha_n(t, t_0) - |\lambda_{n,m}|^2 \alpha_n^*(t, t_0) + 2i\Im[\kappa_{n,m}^* \lambda_{n,m}^* \beta_n(t, t_0)], \quad (5.3.7)$$

$$\beta_{n,m}^j(t, t_0) = (\kappa_{n,m}^*)^2 \beta_n(t, t_0) - \lambda_{n,m}^2 \beta_n^*(t, t_0) + 2i\kappa_{n,m}^* \lambda_{n,m} \Im[\alpha_n(t, t_0)], \quad \forall t \in \mathbb{I}. \quad (5.3.8)$$

A diferencia de los coeficientes dados por las Ecs. (4.3.11) y (4.3.12), que dependían sólo del autovalor ω_n , tanto $\alpha_{n,m}^j(t, t_0)$ como $\beta_{n,m}^j(t, t_0)$ dependen ahora no sólo de éste, sino también de la representación irreducible considerada (como indica la etiqueta m).³ En definitiva, todos los modos en una misma representación irreducible (n, m) de G , evolucionan en el tiempo con los mismos coeficientes $\alpha_{n,m}^j(t, t_0)$ y $\beta_{n,m}^j(t, t_0)$.

³Esto se debe a que, para el grupo $SO(4)$, cada subespacio propio del operador de Laplace-Beltrami es por sí mismo una representación irreducible.

De nuestra discusión, se sigue entonces que la implementación unitaria de la dinámica respecto de j se traduce en la condición de sumabilidad

$$\sum_{n,l} |\beta_{n,l}^j(t, t_0)|^2 = \sum_{n,m} g_{n,m} |\beta_{n,m}^j(t, t_0)|^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{I}, \quad (5.3.9)$$

donde hemos empleado que la dimensión de cada representación irreducible es justamente $g_{n,m}$.

5.3.3. Unicidad de la representación bajo los criterios de invariancia y unitariedad

Vamos a demostrar que, si la condición (5.3.9) se satisface, entonces la secuencia $\{\sqrt{g_{n,m}}\lambda_{n,m}\}$ debe ser de cuadrado sumable (respecto a n y a m),⁴ que es justamente la condición que asegura la equivalencia unitaria de las representaciones asociadas a j y j_0 .

Siguiendo los argumentos explicados al principio de la Sección 4.3.3, concluimos que, si la secuencia $\{\sqrt{g_{n,m}}\beta_{n,m}^j(t, t_0)\}$ es de cuadrado sumable, entonces

$$\{\sqrt{g_{n,m}}\beta_{n,m}^j(t, t_0)/(\kappa_{n,m}^*)^2\} \quad (5.3.10)$$

también ha de serlo, ya que $|\kappa_{n,m}|^2 = 1 + |\lambda_{n,m}|^2 \geq 1$. Analizando en detalle los elementos de esta última secuencia, se ve que su sumabilidad al cuadrado implica la de

$$\{\sqrt{g_{n,m}} z_{n,m} \Im[\alpha_n(t, t_0)]\}, \quad (5.3.11)$$

con $z_{n,m} = \lambda_{n,m}/\kappa_{n,m}^*$ (consúltese la Sección 4.3.3 para detalles adicionales). Empleando el comportamiento asintótico (5.1.11), podemos comprobar que los elementos de la anterior secuencia, salvo correcciones sumables, se corresponden con

$$\left\{ \sqrt{g_{n,m}} z_{n,m} \sin \left[\omega_n(t - t_0) + \int_{t_0}^t d\bar{t} \frac{s(\bar{t})}{2\omega_n} \right] \right\}, \quad (5.3.12)$$

que, por tanto, debe ser también de cuadrado sumable $\forall t \in \mathbb{I}$. Es conveniente introducir el tiempo desplazado $\tau = t - t_0$, definido en el dominio $\bar{\mathbb{I}}$. Introduciéndolo en la expresión (5.3.12), concluimos que la función

$$Z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_m g_{n,m} |z_{n,m}|^2 \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^{\tau} d\bar{t} \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} \right] \quad (5.3.13)$$

⁴En lo sucesivo, omitiremos a menudo la referencia a las etiquetas n y m cuando estudiemos la sumabilidad de las secuencias, para aligerar en lo posible la discusión.

debe estar bien definida $\forall \tau \in \bar{\mathbb{I}}$.

En este punto, nos encontramos con dos posibilidades. La primera es que $Z(\tau)$ sea una función integrable en cierto subintervalo de la forma $\bar{\mathbb{I}}_L = [a, a + L] \subseteq \bar{\mathbb{I}}$ donde L es un número positivo que es siempre menor o igual que la longitud de $\bar{\mathbb{I}}$, y donde a se ha elegido convenientemente. En estas circunstancias, es posible ver que

$$\begin{aligned} I_L &= \int_{\bar{\mathbb{I}}_L} d\tau Z(\tau) \geq \sum_{n=n_0}^M \sum_m g_{n,m} |z_{n,m}|^2 \int_{\bar{\mathbb{I}}_L} d\tau \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} d\bar{t} \right] \\ &\geq \Lambda_{n_0} \sum_{n=n_0}^M \sum_m g_{n,m} |z_{n,m}|^2, \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

donde M es cualquier entero mayor que n_0 , y este otro entero fijo se ha escogido de tal modo que las integrales sobre $\bar{\mathbb{I}}_L$ del segundo término de la desigualdad estén acotadas inferiormente por un cierto número $\Lambda_{n_0} > 0$ (para todo $n > n_0$). Esto siempre se puede hacer debido a que, en el límite $n \rightarrow \infty$, el último sumando en el argumento de la función seno tiende a cero, y la integral toma el valor $L/2$ en el límite. Por tanto, la secuencia $\{\sqrt{g_{n,m}} z_{n,m}\}$ resulta ser de cuadrado sumable, ya que las sumas parciales de sus cuadrados (en módulo) forman una secuencia no decreciente acotada superiormente.

La otra posibilidad es que la función $Z(\tau)$ no sea integrable. No obstante, sí es una función medible, puesto que es el límite de una secuencia de sumas parciales de funciones integrables (y en consecuencia medibles). En este caso, podemos hacer uso del teorema de Luzin. Recordemos de la Sección 4.3.3 que dicho teorema asegura que, para todo $\delta > 0$, existe $E_\delta \subset \bar{\mathbb{I}}_L$ tal que su complementario \bar{E}_δ respecto de $\bar{\mathbb{I}}_L$ satisface $\int_{\bar{E}_\delta} d\tau < \delta$ y la restricción $Z(\tau)$ al intervalo E_δ es una función continua. Siguiendo los mismo pasos que vimos en la Sección 4.3.3, podemos comprobar entonces que

$$\begin{aligned} I_\delta &= \int_{E_\delta} d\tau Z(\tau) \geq \sum_{n=n_0}^M \sum_m g_{n,m} |z_{n,m}|^2 \int_{E_\delta} d\tau \sin^2 \left[\omega_n \tau + \int_0^\tau \frac{s(\bar{t} + t_0)}{2\omega_n} d\bar{t} \right] \\ &\geq (\Lambda_{n_0} - \delta) \sum_{n=n_0}^M \sum_m g_{n,m} |z_{n,m}|^2, \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

donde la constante δ se elige de forma que $\Lambda_{n_0} > \delta$.

En conclusión, tanto si $Z(\tau)$ es integrable como si no, es posible encontrar una cota superior para las secuencias (crecientes) de sumas parciales de términos $g_{n,m} |z_{n,m}|^2$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_m g_{n,m} |z_{n,m}|^2 < \infty. \quad (5.3.16)$$

En particular, esto implica que $z_{n,m} = \lambda_{n,m}/\kappa_{n,m}^*$ debe tender a cero y, en consecuencia, debe hacerlo $\lambda_{n,m}$, ya que $|\kappa_{n,m}| \geq 1$. Aún más, como $|\kappa_{n,m}|^2 = 1 + |\lambda_{n,m}|^2$, tenemos que $|\kappa_{n,m}|$ ha de tender a la unidad. Así pues, tanto $\kappa_{n,m}$ como $1/\kappa_{n,m}$ forman secuencias acotadas. Empleando esto, es inmediato ver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{g_n} g_{n,m} |\lambda_{n,m}|^2 < \infty. \quad (5.3.17)$$

Esto concluye nuestra demostración de que las representaciones que proporcionan j y j_0 son unitariamente equivalentes.

En resumen, cualquier representación asociada a una estructura compleja j invariante bajo el grupo de simetrías G y que admite una implementación unitaria de la dinámica pertenece a la clase de equivalencia de representaciones unitariamente equivalentes a la asociada al campo escalar sin masa, determinada por j_0 .

5.4. Unicidad de la parametrización del campo para topologías compactas arbitrarias

La cuestión que surge ahora es la misma que ya nos preguntamos en la Sección 4.4.1. Los resultados de unicidad anteriores son en principio válidos para una elección concreta de par canónico ϕ y P_ϕ , para el que se cumplen unas ecuaciones dinámicas específicas. Pero sabemos que hay situaciones donde los campos no tienen una interpretación fundamental clara, como ocurre en muchos escenarios cosmológicos, donde es común redefinirlos y re-escalarlos para llegar a una descripción más simple. Un ejemplo claro es un campo escalar φ de prueba con masa m que se propaga en un espaciotiempo de FLRW, con métrica $ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \gamma_{ab}dx^a dx^b]$, donde γ_{ab} ($a, b = 1, 2, 3$) es la métrica riemanniana bien de una tres-esfera, de una variedad plana tridimensional o de un hiperboloide con dimensión $d = 3$. La ecuación de movimiento del campo es

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - \Delta\varphi + m^2 a^2 \varphi = 0. \quad (5.4.1)$$

Aquí, la derivada respecto del tiempo conforme η se indica con un punto. Una descripción análoga se puede realizar por medio de un nuevo campo $\phi = a\varphi$, que satisface la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} - \Delta\phi + \left(m^2 a^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right)\phi = 0, \quad (5.4.2)$$

correspondiente a un campo de Klein-Gordon en un espaciotiempo estático con métrica $ds^2 = -d\eta^2 + \gamma_{ab}dx^a dx^b$, pero que está sujeto a un potencial dependiente del tiempo

$V(\phi) = (m^2 a^2 - \ddot{a}/a)\phi^2/2$. Por ello, debemos ser cuidadosos y conocer qué es lo que ocurre con nuestros criterios de unicidad al considerar re-escalados del campo como el que acabamos de ver, muy comunes en cosmología. Tenemos pues que ampliar nuestro análisis para tener en cuenta otras descripciones con pares canónicos de campos diferentes que ϕ y P_ϕ , y asegurarnos de que no existen para ellos cuantizaciones de Fock con las mismas propiedades de invariancia y unitariedad pero inequivalentes a la original.

5.4.1. Ambigüedad en la elección del campo: transformación canónica dependiente del tiempo y dinámica clásica

Para estudiar esta nueva ambigüedad, vamos a introducir una transformación canónica que consiste en un re-escalado del campo, junto con el re-escalado inverso de su momento y la adición al mismo de un término lineal en el campo convenientemente densitizado, es decir

$$\phi = f(t)\varphi, \quad P_\phi = \frac{P_\varphi}{f(t)} + g(t)\sqrt{h}\varphi, \quad (5.4.3)$$

que coincide con el ya introducido en (4.4.3), pero esta vez la métrica h considerada es justamente la de una variedad riemanniana Σ con topología compacta arbitraria. Las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son funciones reales doblemente diferenciables, y $f(t)$ difiere de cero $\forall t \in \mathbb{I}$. Estas propiedades garantizan que se preserva la estructura diferencial de nuestra teoría clásica, a la vez que se evita introducir singularidades artificiales. Además, asumimos que esas dos funciones satisfacen las condiciones iniciales $f(t_0) = 1$ y $g(t_0) = 0$ para cierto tiempo inicial t_0 . En principio, uno podría haber escogido funciones con condiciones iniciales más generales, pero ya vimos en la Sección 4.4.1 que esos datos iniciales se pueden redefinir en la práctica convenientemente.

Estudiemos la nueva dinámica del sistema, que da la evolución de la nueva elección de variables. Como la transformación canónica introducida es dependiente del tiempo, la dinámica correspondiente al par (φ, P_φ) difiere de la que se discutió para (ϕ, P_ϕ) . Para comparar ambas, realizamos una descomposición en modos, como ya hicimos para el campo ϕ [véase la Ec. (5.1.4)]. La transformación canónica dependiente del tiempo afecta a todos los modos por igual, así que la relación entre modos es similar a (5.4.3), pero sustituyendo campos por modos. Si pasamos a la base de variables de creación y destrucción de cada par canónico, cada una de las matrices de evolución $\tilde{\mathcal{U}}_{n,l}(t, t_0)$ que determinan la dinámica de las nuevas variables está relacionada con las matrices de la dinámica antigua mediante la relación $\tilde{\mathcal{U}}_{n,l}(t, t_0) = \mathcal{T}_{n,l}(t)\mathcal{U}_{n,l}(t, t_0)$, donde $\mathcal{T}_{n,l}(t)$ es la matriz dada en la Ec. (4.4.5) [que coincide con la identidad en $t = t_0$ debido a las condiciones iniciales de $f(t)$ y $g(t)$], eso sí, adaptada a la variedad Σ [o equivalentemente

a la descomposición proporcionada por la base de autofunciones Ψ_{nl_n} . Los coeficientes de Bogoliubov de la nueva matriz $\tilde{\mathcal{U}}_{n,l}(t, t_0)$ son

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{n,l}(t) &= \tilde{\alpha}_n(t) = f_+(t)\alpha_n(t) + f_-(t)\beta_n^*(t) + i\frac{g(t)}{2\omega_n}[\alpha_n(t) + \beta_n^*(t)], \\ \tilde{\beta}_{n,l}(t) &= \tilde{\beta}_n(t) = f_+(t)\beta_n(t) + f_-(t)\alpha_n^*(t) + i\frac{g(t)}{2\omega_n}[\alpha_n^*(t) + \beta_n(t)],\end{aligned}\quad (5.4.4)$$

donde resaltamos de nuevo la independencia en la etiqueta l .

5.4.2. Criterios de unicidad sobre la elección de las variables de campo

Vamos a probar que una transformación canónica del tipo (5.4.3) es incompatible con una implementación de la dinámica determinada por $\tilde{\mathcal{U}}_{n,l}(t, t_0)$ respecto a una representación de Fock invariante bajo el grupo G de simetrías, salvo si la función $f(t)$ es la identidad. Elaboraremos una demostración considerablemente diferente a la que se presentó en la Sección 4.4.1.

Empecemos escribiendo explícitamente la condición de implementación unitaria de la dinámica. Partimos de una estructura compleja j invariante bajo el grupo G , pero por lo demás arbitraria. Sabemos que esta estructura compleja está relacionada con la asociada al caso del campo escalar sin masa, j_0 , mediante un simplectomorfismo \mathcal{K} que es diagonal por bloques, donde cada bloque $\mathcal{K}_{n,m}$ está determinado por dos números complejos $(\kappa_{n,m}, \lambda_{n,m})$ que, para cada n fijo dado, dependen del entero m que etiqueta la representación irreducible del grupo G en el subespacio $\Gamma^n = \bigoplus_m \Gamma_m^n$ del espacio de fases Γ . Recordamos también que $\Gamma_m^n = \mathcal{Q}_m^n \oplus \mathcal{P}_m^n$.

La dinámica asociada al nuevo par (φ, P_φ) admite una implementación unitaria respecto de la representación asociada a j si y sólo si la transformación que determina el conjunto de matrices $\mathcal{K}_{n,m}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}_n(t, t_0)\mathcal{K}_{n,m}$ es implementable unitariamente respecto de j_0 o, en otras palabras, si la secuencia de elementos $\sqrt{g_{n,m}}\tilde{\beta}_{n,m}^j(t, t_0)$ es de cuadrado sumable para todos los valores posibles de t , donde

$$\tilde{\beta}_{n,m}^j(t, t_0) = (\kappa_{n,m}^*)^2\tilde{\beta}_n(t, t_0) - \lambda_{n,m}^2\tilde{\beta}_n^*(t, t_0) + 2i\kappa_{n,m}^*\lambda_{n,m}\Im[\tilde{\alpha}_n(t, t_0)]. \quad (5.4.5)$$

Al asumir que la evolución es unitaria respecto de j en la nueva descripción de campo, tenemos que

$$\sum_n \sum_m^\infty g_{n,m} |\tilde{\beta}_{n,m}^j(t)|^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{I}. \quad (5.4.6)$$

Dado que cada uno de los términos de la suma es positivo, si tomamos un valor particular M de m para cada n , la secuencia $\{g_{n,M}|\tilde{\beta}_{n,M}^j(t)|^2\}$ debe ser también sumable. Es

importante resaltar que esto es cierto para cualquier elección de M que se haga. Como tanto $g_{n,M}$ como $|\kappa_{n,M}|$ son mayores que 1, la secuencia $\{\tilde{\beta}_{n,M}^j(t)/(\kappa_{n,M}^*)^2\}$ también debe ser de cuadrado sumable, para todo tiempo. Así, una condición que deben satisfacer los elementos de esta secuencia, $\forall t$, es que deben tender a cero en el límite $n \rightarrow \infty$. Para ver las consecuencias de esta restricción, usaremos el comportamiento asintótico de $\alpha_n(t, t_0)$ y $\beta_n(t, t_0)$. Basta con introducir la Ec. (4.1.19) en las Ecs. (5.1.11) y (5.1.12), y tomar los términos dominantes en el límite $n \rightarrow \infty$, que resultan ser $\beta_n(t, t_0) = 0$ y $\alpha_n(t, t_0) = e^{-i\omega_n\tau}$. Si queremos que la condición (5.4.6) se satisfaga, entonces las secuencias

$$(e^{i\omega_n\tau} - z_{n,M}^2 e^{-i\omega_n\tau}) f_-(t) - 2iz_{n,M} \sin(\omega_n\tau) f_+(t) \quad (5.4.7)$$

deben tender a cero $\forall t$ en \mathbb{I} .

Esto implica que tanto la parte real

$$A_{n,M} \sin(\omega_n\tau) + B_{n,M} \cos(\omega_n\tau) \quad (5.4.8)$$

como la imaginaria

$$C_{n,M} \sin(\omega_n\tau) + D_{n,M} \cos(\omega_n\tau) \quad (5.4.9)$$

deben de tender a cero en el límite $n \rightarrow \infty$, donde hemos introducido las definiciones

$$\begin{aligned} A_{n,M} &= 2y_{n,M}(f_+ - x_{n,M}f_-), & B_{n,M} &= (1 + y_{n,M}^2 - x_{n,M}^2)f_-, \\ C_{n,M} &= (1 + x_{n,M}^2 - y_{n,M}^2)f_- - 2x_{n,M}f_+, & D_{n,M} &= -2x_{n,M}y_{n,M}f_-, \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

y $x_{n,M}$ e $y_{n,M}$ son la parte real e imaginaria de $z_{n,M}$, es decir, $z_{n,M} = x_{n,M} + iy_{n,M}$. Además, hemos omitido la dependencia en t de $f_{\pm}(t)$ para no sobrecargar la notación.

El hecho de que las secuencias formadas por (5.4.8) y (5.4.9) deban tender a cero nos permitirá demostrar que necesariamente ha de cumplirse que $f(t) = 1 \forall t \in \mathbb{I}$.

Demostración de la no unitariedad de los re-escalados dependientes del tiempo

Como $|\lambda_{n,M}| \leq |\kappa_{n,M}|$, tenemos que

$$|z_{n,M}|^2 = |x_{n,M}|^2 + |y_{n,M}|^2 \leq 1. \quad (5.4.11)$$

En consecuencia, puede comprobarse que las secuencias formadas por $A_{n,M}$, $B_{n,M}$, $C_{n,M}$ y $D_{n,M}$ están acotadas. Usando esto, y percatándose de que las Ecs. (5.4.8) y (5.4.9) se asemejan a un sistema de ecuaciones homogéneo en el límite $n \rightarrow \infty$, podemos construir combinaciones lineales en las que los coeficientes son el determinante de la matriz del sistema,

$$(A_{n,M}D_{n,M} - B_{n,M}C_{n,M}) \sin(\omega_n\tau), \quad (5.4.12)$$

$$(A_{n,M}D_{n,M} - B_{n,M}C_{n,M}) \cos(\omega_n \tau), \quad (5.4.13)$$

y que deben también anularse en el límite considerado. Obviamente, esto es posible si y sólo si la secuencia de coeficientes $A_{n,M}D_{n,M} - B_{n,M}C_{n,M}$ tiende a cero. Un cálculo sencillo muestra que

$$A_{n,M}D_{n,M} - B_{n,M}C_{n,M} = f_- (x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2 - 1)[(1 + x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2)f_- - 2x_{n,M}f_+]. \quad (5.4.14)$$

Vamos a probar que una condición necesaria para una implementación unitaria de la dinámica es que la secuencia de elementos $(x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2 - 1)$ [uno de los factores en la Ec. (5.4.14)] no tienda a cero. Veamos que, en caso contrario, llegamos a una contradicción.

Si la secuencia $\{x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2 - 1\}$ tiende a cero, esto significa que (5.4.14) también lo hace. Pero aún debemos comprobar que tanto (5.4.8) como (5.4.9) tienden a cero para todos los valores de t en \mathbb{I} , como habíamos mostrado que es necesario. Si sumamos los cuadrados de esas expresiones, y hacemos uso de la hipótesis $x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2 \rightarrow 1$ para $n \rightarrow \infty$, vemos entonces que

$$(f_+ - x_{n,M}f_-) \sin(\omega_n \tau) + y_{n,M}f_- \cos(\omega_n \tau) \quad (5.4.15)$$

debe tender a cero para todo valor del tiempo t . Llegados a este punto, existen dos posibilidades. La primera es que los coeficientes $y_{n,M} \rightarrow 0$. Como hemos asumido que $x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2$ tiende a la unidad, deducimos inmediatamente que $x_{n,M}^2 \rightarrow 1$. Introduciendo esto en la Ec. (5.4.15), concluimos que debe haber una subsecuencia de valores de n tal que, o bien $f \sin(\omega_n \tau)$, o bien $\sin(\omega_n \tau)/f$ (o ambos), tiende a cero. En cualquiera de los casos, recordando que $f(t)$ es una función estrictamente positiva, sólo cabe la conclusión de que $\sin(\omega_n \tau)$ tienda a cero en alguna subsecuencia, para todo t . Pero esto es imposible según los resultados del Apéndice C. Así pues, debemos considerar la otra alternativa, que es que la secuencia formada por $y_{n,M}$ no tienda a cero. Tomemos de nuevo la Ec. (5.4.15), e introduzcamos las siguientes definiciones

$$\rho_{n,M} \cos(\Theta_{n,M}) = f_+ - x_{n,M}f_-, \quad \rho_{n,M} \sin(\Theta_{n,M}) = y_{n,M}f_-, \quad (5.4.16)$$

tal que

$$\cot(\Theta_{n,M}) = \frac{1}{y_{n,M}} \frac{f_+}{f_-} - \frac{x_{n,M}}{y_{n,M}}, \quad \rho_{n,M}^2 = (f_+ - x_{n,M}f_-)^2 + y_{n,M}^2 f_-^2. \quad (5.4.17)$$

Podemos ver que $\rho_{n,M}^2$ forma una secuencia acotada inferiormente por $(f_+ - |f_-|)^2$. Además, como hemos asumido que $y_{n,M}$ no tiende a cero, existirá una subsecuencia S de valores de n y un número $\epsilon > 0$ tal que $|y_{n,M}| > \epsilon$ en S . Para los valores de n en S , obtenemos entonces que

$$\rho_{n,M}^2(t) \geq (f_+ - |f_-|)^2 + \epsilon^2 f_-^2 = \varrho^2(t). \quad (5.4.18)$$

Esta cota inferior es estrictamente positiva para todos los valores de t . En caso de que $f_-(t) \neq 0$ se tiene que $\varrho^2 \geq \epsilon^2 f_-^2(t) > 0$, mientras que si $f_-(t) = 0$ se llega a $\varrho^2 = 1$ [ya que $f(t)$ y $f_+(t)$ son entonces iguales a la unidad].

Sustituyendo las definiciones (5.4.16) en la expresión (5.4.15), concluimos que la secuencia formada por

$$\rho_{n,M} \sin(\omega_n \tau + \Theta_{n,M}) \quad (5.4.19)$$

debe de tender a cero en la subsecuencia S de n . Pero sabemos que $\rho_{n,M}$ es una función acotada inferiormente en esa subsecuencia, por lo que $\sin(\omega_n \tau + \Theta_{n,M})$ debe de tender a cero en ella para todo t . Vamos a ver, no obstante, que esto es imposible, utilizando los resultados del Apéndice C. Para ello, empezamos analizando la primera y segunda derivada de $\Theta_{n,M}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_{n,M} &= \frac{y_{n,M}}{\rho_{n,M}^2} \frac{\dot{f}}{f}, \\ \ddot{\Theta}_{n,M} &= \frac{y_{n,M}}{\rho_{n,M}^2 f} \left(\ddot{f} - \frac{\dot{f}^2}{f} - \frac{2\dot{f}\dot{f}_-}{\rho_{n,M}^2} [(x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2)f_- - x_{n,M}f_+] \right). \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Teniendo en cuenta que $x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2 \leq 1$ y que $\rho_{n,M}^2(t)$ tiene una cota inferior $\varrho^2(t)$ en S , para cada valor de t tenemos que

$$|\dot{\Theta}_{n,m}| \leq \frac{1}{\varrho^2} \frac{|\dot{f}|}{f}, \quad (5.4.21)$$

$$|\ddot{\Theta}_{n,m}| \leq \frac{1}{\varrho^2 f} \left(|\ddot{f}| + \frac{\dot{f}^2}{f} + \frac{2|\dot{f}\dot{f}_-|}{\varrho^2} [|f_-| + |f_+|] \right). \quad (5.4.22)$$

Dado que $f(t)$ y $\varrho^2(t)$ son dos funciones continuas estrictamente positivas, el lado de la derecha de ambas desigualdades (5.4.21) y (5.4.22) son funciones de t acotadas en cualquier intervalo finito. En conclusión, para cualquier intervalo temporal $[a, b]$ existen dos números positivos X e Y tal que

$$|\dot{\Theta}_{n,M}| < X, \quad |\ddot{\Theta}_{n,M}| < Y. \quad (5.4.23)$$

Así que la secuencia $\sin(\omega_n \tau + \Theta_{n,M})$ satisface los requisitos del Apéndice C, y podemos afirmar que no tiende a cero en ninguna subsecuencia S para todo t . De todo esto, deducimos que la única posibilidad compatible con nuestras hipótesis es que la secuencia $\{x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2 - 1\}$ no tienda a cero en el límite de n grande, como habíamos anticipado.

Continuemos con nuestra demostración de que, a menos que la función $f(t)$ sea igual a la unidad, una implementación unitaria de la dinámica no es posible. Supongamos lo contrario, que existen algunos valores de t tales que $f(t) \neq 1$. Veremos que esto conduce

de nuevo a una contradicción. Recordemos que la función $f(t)$ es estrictamente positiva y continua. Esto implica, en particular, que $f(t) \neq 1$ si y sólo si $f_-(t) \neq 0$. Restrinjamos nuestra discusión a los valores de t mencionados, y volvamos a la expresión (5.4.14). Una implementación unitaria de la dinámica requiere entonces que las secuencias de elementos

$$(x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2 - 1)[(1 + x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2)f_- - 2x_{n,M}f_+] \quad (5.4.24)$$

tiendan a cero en todos los tiempos t considerados. Ya sabemos que las secuencias formadas a partir de $(x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2 - 1)$ no pueden tender a cero para $n \rightarrow \infty$. Por tanto, existe un $\epsilon > 0$ y una subsecuencia de enteros en la que $|x_{n,M}^2 + y_{n,M}^2 - 1| > \epsilon$. Esto implica que el segundo factor en la Ec. (5.4.24) debe tender a cero en dicha subsecuencia, lo que permite concluir el mismo comportamiento para

$$f^2(t)[(1 - x_{n,M})^2 + y_{n,M}^2] - [(1 + x_{n,M})^2 + y_{n,M}^2]. \quad (5.4.25)$$

Debido a ello, la función $f(t)$ debe coincidir en todos los tiempos t que hemos considerado, porque las secuencias independientes del tiempo formadas por $(1 - x_{n,M})^2 + y_{n,M}^2$ y $(1 + x_{n,M})^2 + y_{n,M}^2$ no pueden tender ambas a cero (en ninguna subsecuencia de enteros). Concluimos que, irremediabilmente, la función $f(t)$ toma únicamente dos valores diferentes, uno que es la unidad (lo que ocurre de hecho a tiempo t_0) y otro distinto de 1. Pero, como $f(t)$ es una función continua, esta última afirmación es insostenible, lo que da lugar a una contradicción, tal y como esperábamos.

En conclusión, la única posibilidad compatible con una dinámica unitaria es que la función $f(t)$ sea constante e igual a la unidad $\forall t \in \mathbb{I}$, como queríamos demostrar.

Redefinición del momento

Para continuar con la discusión sobre los criterios de unicidad, una vez probado que el único caso admisible es $f(t) = 1$, vamos a estudiar la parte de la transformación canónica que consiste en una redefinición de la variable de momento

$$P_\phi = P_\varphi + g(t)\sqrt{\hbar}\varphi. \quad (5.4.26)$$

Vamos a ver que, para variedades Σ con dimensión $d < 4$, aparecen dos situaciones diferentes, caracterizadas por la sumabilidad o no de la secuencia formada por g_n/ω_n^2 . En el caso de que dicha secuencia no sea sumable, la unitariedad de la dinámica exige que $g(t) = 0$. Por el contrario, cuando la secuencia es sumable (lo que ocurre en general para variedades unidimensionales), la dinámica admite una implementación unitaria respecto a j_0 independientemente de la función $g(t)$. En este caso, la transformación canónica (5.4.26) es implementable unitariamente y en realidad no introduce

ambigüedad esencial alguna en la cuantización, por lo que nuestros resultados de unicidad siguen siendo válidos. Pasamos a detallar estos puntos.

Volvamos de nuevo a la condición que garantiza una implementación unitaria de la dinámica respecto de la representación asociada a la estructura compleja j , esto es, que la secuencia $\{\sqrt{g_{n,m}}\tilde{\beta}_{n,m}^j(t)/(\kappa_{n,m}^*)^2\}$ debe ser de cuadrado sumable (en n y m). Como hemos dicho, particularizamos ya la discusión al caso $f(t) = 1$. Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\beta}_{n,m}^j(t)}{(\kappa_{n,m}^*)^2} &= \beta_n \left(1 + \frac{ig(t)}{2\omega_n}\right) - z_{n,m}^2 \beta_n^* \left(1 - \frac{ig(t)}{2\omega_n}\right) + iz_{n,m} \frac{g(t)}{\omega_n} [\Re(\beta_n) + \Re(\alpha_n)] \\ &\quad + i \frac{g(t)}{2\omega_n} \alpha_n^* + i \frac{g(t)}{2\omega_n} z_{n,m}^2 \alpha_n + 2iz_{n,m} \Im(\alpha_n). \end{aligned} \quad (5.4.27)$$

Puesto que la secuencia $\{\sqrt{g_{n,m}}\beta_n\}$ es de cuadrado sumable, y $|z_{n,m}|$ está acotada, todos los términos proporcionales a β_n son de cuadrado sumable. Dado que el conjunto de secuencias de cuadrado sumable es un espacio lineal, concluimos que una condición necesaria para una implementación unitaria de la dinámica es que la suma $\sum_{n,m} g_{n,m} |B_{n,m}|^2$ sea finita, donde

$$B_{n,m}(t) = 2z_{n,m} \Im(\alpha_n) + \frac{g(t)}{2\omega_n} [\alpha_n^* + z_{n,m}^2 \alpha_n + 2z_{n,m} \Re(\alpha_n)] \quad (5.4.28)$$

es la contribución restante de $\tilde{\beta}_{n,m}^j(t)/(\kappa_{n,m}^*)^2$ (dividida por i).

Podemos hacer uso ahora de los resultados empleados en el capítulo anterior, en particular en la Sección 4.4.4 (véanse también las Refs. [113, 114]). Allí vimos que, salvo correcciones del orden de $1/\omega_n$, $\alpha_n(t) \approx e^{-i\omega_n \tau}$ para valores de n suficientemente grandes. Con ello, se puede ver fácilmente que una condición necesaria para una implementación unitaria de la dinámica es que la secuencia

$$2\sqrt{g_{n,m}} |z_{n,m}| \Im(\alpha_n) + \sqrt{g_{n,m}} \frac{g(t)}{2\omega_n} [e^{i(\omega_n \tau - \delta_{n,m})} + |z_{n,m}|^2 e^{-i(\omega_n \tau - \delta_{n,m})} + 2|z_{n,m}| \cos(\omega_n \tau)] \quad (5.4.29)$$

sea de cuadrado sumable en n y m . Por conveniencia, hemos reescrito $z_{n,m} = |z_{n,m}|e^{i\delta_{n,m}}$.

Dado que $\omega_n \rightarrow \infty$, la secuencia anterior dividida por ω_n será también de cuadrado sumable. Además, el segundo término de la secuencia (5.4.29), una vez dividido por ω_n , resulta ser de cuadrado sumable, ya que sabemos que $\sqrt{g_{n,m}}/\omega_n^2$ lo es (recordemos que $|z_{n,m}| \leq 1$ para todo n y m). En conclusión, deducimos que la secuencia formada por $\sqrt{g_{n,m}} |z_{n,m}| \Im[\alpha_n(t)]/\omega_n$ debe ser de cuadrado sumable para cualquier valor del tiempo t . Entonces, siguiendo los argumentos del final de la Sección 5.3.3, podemos

concluir que $\{\sqrt{g_{n,m}}|z_{n,m}|/\omega_n\}$ ha de ser necesariamente una secuencia de cuadrado sumable.

Volvamos de nuevo a la secuencia de la Ec. (5.4.29). Los términos que constituyen los dos últimos sumandos de dicha secuencia son claramente de cuadrado sumable, ya que $|z_{n,m}|e^{-i(\omega_n\tau - \delta_{n,m})} + 2\cos(\omega_n\tau)$ está acotado superiormente por 3, y acabamos de ver la sumabilidad de los términos $\sqrt{g_{n,m}}|z_{n,m}|/\omega_n$ al cuadrado.

De ello se sigue que los demás términos de (5.4.29) también proporcionan una secuencia de cuadrado sumable a todo tiempo. En particular, la parte imaginaria debe serlo, lo que nos permite deducir que

$$\frac{g(t)}{\omega_n} \sqrt{g_{n,m}} \sin(\omega_n\tau - \delta_{n,m}) \quad (5.4.30)$$

debe formar también una secuencia de cuadrado sumable $\forall t \in \mathbb{I}$.

Para ello, claramente, una posibilidad es que $g(t)$ sea idénticamente nula. En caso contrario, dado que la función $g(t)$ es continua, existirá al menos un intervalo de tiempo en el que es distinta de cero, y allí $\sqrt{g_{n,m}} \sin(\omega_n\tau - \delta_{n,m})/\omega_n$ debe proporcionar una secuencia de cuadrado sumable, para todos los valores de t en dicho intervalo. Aplicando de nuevo el tipo de argumentos del final de la Sección 5.3.3, llegamos a la conclusión de que $\sqrt{g_{n,m}}/\omega_n$ debe ser de cuadrado sumable.

En caso de que la secuencia formada por $g_{n,m}/\omega_n^2$ no sea sumable, llegamos a una contradicción, por lo que la función $g(t)$ debe ser idénticamente nula para todo tiempo t . Ésta es la situación que ya fue estudiada en el capítulo anterior para una variedad Σ con la topología de una tres-esfera.

Por otro lado, sabemos que existen situaciones en las que $\{g_{n,m}/\omega_n^2\}$ es sumable, como es el caso estudiado en la Ref. [35], donde la topología espacial es la del círculo S^1 . Para ver en detalle las consecuencias que se deducen en estas situaciones, consideramos otra vez la secuencia (5.4.29) y estudiamos la condición de que tenga cuadrado sumable. Como hemos asumido que la secuencia de elementos $g_{n,m}/\omega_n^2$ es sumable, recordando nuestra discusión anterior llegamos a que la contribución que proviene del primer término de la Ec. (5.4.29), es decir $\sqrt{g_{n,m}}|z_{n,m}|\Im[\alpha_n(t)]$ (salvo un factor multiplicativo irrelevante), es de cuadrado sumable para todos los valores de t en el intervalo dado. Esto, junto con una ligera generalización de la discusión que aparece en la Sección 4.4.4, nos permite concluir que $\sqrt{g_{n,m}}|z_{n,m}|$ forma una secuencia de cuadrado sumable. Si recordamos además que $z_{n,m} = \lambda_{n,m}/\kappa_{n,m}^*$ y que $|\kappa_{n,m}|^2 = 1 + |\lambda_{n,m}|^2$, obtenemos que $1/\kappa_{n,m}$ forma una secuencia acotada inferiormente, ya que $|z_{n,m}| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, lo que implica que $|\lambda_{n,m}| \rightarrow 0$. Esto lleva de forma inmediata a la conclusión de que la secuencia $\{\sqrt{g_{n,m}}|\lambda_{n,m}|\}$ es de cuadrado sumable. Precisamente esta condición es la que garantiza que ambas representaciones j y j_0 sean unitariamente equivalentes. En

este sentido, en los casos en los que $\{g_{n,m}/\omega_n^2\}$ es sumable en n y m , una redefinición del momento del campo escalar a través de la transformación canónica (5.4.26) no introduce ambigüedad alguna en la cuantización.

Resumiendo los resultados de este apartado, si queremos una implementación unitaria de la dinámica después de introducir una transformación canónica del tipo (5.4.26), o bien la función $g(t)$ debe ser idénticamente nula (no se admiten transformaciones canónicas de ese tipo), o se satisface la condición adicional de que la secuencia formada por $g_{n,m}/\omega_n^2$ sea sumable. En este último caso, la transformación canónica (5.4.26) es aceptable, en el sentido de que la dinámica admite una implementación unitaria en una representación invariante bajo el grupo de simetrías incluso con el cambio de momento, pero dicha representación resulta ser siempre unitariamente equivalente a la asociada al campo escalar sin masa, determinada por j_0 .

5.5. Conclusiones

Como hemos venido comentando a lo largo de esta tesis, la cuantización de campos está plagada de ambigüedades que conllevan una pérdida de significación de las predicciones. En ausencia de observaciones que permitan acotar esa ambigüedad, tener al alcance criterios que permitan elegir una única representación cuántica es esencial si se pretende realizar un estudio teórico riguroso de sistemas que admiten una descripción de campos. En el Capítulo 4 estudiamos la aplicación de unos criterios de unicidad propuestos recientemente [31–33, 35, 112, 116–118] para la cuantización de campos en espaciotiempos no estacionarios cuando se propagan en secciones espaciales con la topología de S^3 [34, 113, 114]. En la Sección 4.3 vimos que, si la representación cuántica es invariante bajo el grupo de isometrías –que en ese caso particular resulta ser el grupo $SO(4)$ – y admite una implementación unitaria de la dinámica, entonces pertenece a una única clase de equivalencia de representaciones relacionadas unitariamente entre sí. Además, en la Sección 4.4.1 probamos que estos criterios de unicidad son sólo válidos para una elección concreta de par canónico, no siendo posible realizar un cambio mediante una transformación canónica dependiente del tiempo en la que se re-escala el campo (salvo para re-escalados constantes). Todos estos resultados son de profundo interés, ya que pueden aplicarse en una amplia gama de situaciones, descritas por campos que se propagan en espaciotiempos, de fondo o auxiliares, con la topología espacial de una tres-esfera.

Pero, volviendo a las situaciones estudiadas en cosmología, el modelo que describe el comportamiento del universo [37, 41] favorece, como resultado de diversas observaciones realizadas [136], escenarios en los que las secciones espaciales tienen topología plana.

Motivados en parte por esto, así como por la necesidad de generalizar los resultados del Capítulo 4, en el presente capítulo hemos aplicado de nuevo los criterios de unicidad a campos que se propagan en espaciotiempos curvos, genéricamente no estacionarios, pero esta vez hemos considerado variedades espaciales con topología compacta *arbitraria*. Así conseguimos dar generalidad a nuestros criterios de unicidad, y además aseguramos que son válidos en situaciones de especial interés en cosmología, para secciones espaciales con topología plana compacta (como es el caso del tres-toro).

En la Sección 5.1 hemos considerado como punto de partida un campo escalar que satisface una ecuación de ondas en un espaciotiempo estático, con secciones espaciales de topología compacta arbitraria, y sujeto a un potencial cuadrático dependiente del tiempo. Hemos expandido el campo en modos empleando la base de autoestados del operador de Laplace-Beltrami. Estos modos satisfacen ecuaciones desacopladas de tipo oscilador armónico con una función de masa que varía en el tiempo. A través de este conjunto de ecuaciones hemos determinado la dinámica del sistema. En la Sección 5.2, hemos estudiado una cuantización de Fock construida con la representación que corresponde a un campo escalar sin masa. Hemos visto, además, que la transformación canónica que proporciona la dinámica admite una implementación unitaria en esa representación. Asumiendo la existencia de un grupo G de simetrías espaciales, que preserva la dinámica (porque el operador de Laplace-Beltrami conmuta con todos los elementos del grupo), nos hemos concentrado en el estudio de representaciones en las que el vacío es invariante. En particular, la representación considerada en la Sección 5.2 posee esa propiedad. Teniendo en cuenta el análisis del Capítulo 4, en la Sección 5.3.1 hemos identificado todas esas representaciones. Finalmente, en la Sección 5.3.3 hemos probado que aquéllas que además admiten una implementación unitaria de la dinámica son todas unitariamente equivalentes entre sí. Estos resultados dotan de robustez a la teoría cuántica construida.

Aún más, en la Sección 5.4 hemos discutido la aplicabilidad de nuestros criterios de invariancia y unitariedad en la dinámica para fijar las posibles redefiniciones del par canónico para el campo de partida, motivadas por la consideración natural de re-escalados del campo mediante funciones dependientes del tiempo, típicamente funciones de la geometría de fondo o auxiliar (véase la Sección 5.1). Esta ambigüedad en la elección del par canónico, como vimos en la Sección 5.4.1, se puede concretar mediante la libertad de realizar una transformación canónica lineal en el sistema que consiste en un re-escalado de la configuración del campo por medio de una función dependiente del tiempo, el re-escalado inverso de su momento canónicamente conjugado, más una contribución al mismo que sea proporcional al campo escalar (correctamente densitizado) y vaya multiplicada por otra función dependiente del tiempo. Este tipo de transformaciones, en general, no tiene por qué admitir una implementación unitaria

en la teoría cuántica. Además, estas transformaciones modifican la dinámica, aunque preservan la linealidad y las simetrías espaciales de las ecuaciones de movimiento. La cuestión que hemos investigado es si existe alguna otra cuantización invariante bajo las simetrías espaciales y que admita una implementación unitaria de la dinámica de las nuevas variables canónicas. Hemos visto en la Sección 5.4.2 que los re-escalados del campo dependientes del tiempo no están permitidos en realidad, porque la dinámica pierde su implementabilidad unitaria en la teoría cuántica. En cambio, en el caso de redefiniciones del momento mediante la introducción de una contribución lineal en el campo, se presentan dos posibilidades. Si la secuencia formada por $g_{n,m}/\omega_n^2$ no es sumable, no es admisible una redefinición de esas características, y el único par canónico (salvo transformaciones lineales constantes) que es compatible con nuestros criterios es el asociado a las ecuaciones de Hamilton (5.1.3). Este caso describe la situación general encontrada en variedades con dimensión espacial $d = 2, 3$. En el caso contrario, es decir, cuando $\{\sqrt{g_{n,m}}/\omega_n\}$ tiene cuadrado sumable en n y m , las redefiniciones del momento mencionadas son admisibles, pero no introducen ambigüedades en la teoría cuántica, en el sentido de que únicamente son viables representaciones de Fock unitariamente equivalentes a la asociada al campo escalar sin masa. Esta situación se encuentra, por ejemplo, para campos definidos sobre variedades espaciales unidimensionales ($d = 1$).

Estos resultados de unicidad son válidos para campos que se propagan en variedades con cualquier tipo de topología, siempre y cuando ésta sea compacta. Como adelantamos, un caso de especial interés es aquél en el que la topología es plana, como ocurre para un tres-toro. En este escenario, los autovalores del operador de Laplace-Beltrami están etiquetados por tripletes de enteros n_1 , n_2 y n_3 , cada uno de ellos asociado a una de las dimensiones espaciales, y el autovalor (cambiado de signo) está dado por $\omega_n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. En este caso, la degeneración g_n de cada autoespacio no admite una expresión explícita. El grupo de simetrías espaciales que aparece de forma natural corresponde al producto de tres copias del grupo de traslaciones en el círculo. Cada triplete (n_1, n_2, n_3) proporciona una representación irreducible, aunque compleja, por lo que en la demostración de la Sección 5.3.3 las matrices \mathcal{K} se descomponen en matrices 2×2 etiquetadas por los tres enteros, $\mathcal{K}_{n_1 n_2 n_3}$, salvo que se relacionan entre sí bajo inversión del signo del triplete, al combinar dos representaciones complejas para alcanzar una real. Además, desde un punto de vista puramente técnico, las demostraciones acerca de la redefinición del par canónico para el campo se aplican de forma inmediata a esta situación.

En resumen, hemos proporcionado criterios naturales para la cuantización de campos en espaciotiempos no estacionarios, que permiten elegir una única representación cuántica de entre todas las posibles, y compatibles con una elección específica de par canónico (todo ello salvo equivalencia unitaria). En la siguiente parte de la tesis, vamos

a aplicar las conclusiones de capítulos anteriores para alcanzar una cuantización completa y rigurosa de un universo inflacionario con pequeñas inhomogeneidades. Veremos que nuestros resultados de unicidad van a desempeñar un papel fundamental, dotando de robustez a nuestro análisis teórico.

Modelos inflacionarios

Capítulo 6

Universo inflacionario con pequeñas inhomogeneidades: unicidad de la cuantización

Uno de los paradigmas que ha desempeñado un papel fundamental en el entendimiento de la formación de estructuras en nuestro universo es la teoría de perturbaciones cosmológicas. El primero en abordar este tema fue Lifschitz [38, 127], que analizó perturbaciones de la métrica en un escenario homogéneo e isótropo de tipo FLRW. Según se fue profundizando en el estudio de estos sistemas, se tomó consciencia de que la interpretación física de este tipo de perturbaciones quedaba oscurecida por la libertad de realizar transformaciones de gauge, esto es, transformaciones infinitesimales de coordenadas que preservan el espaciotiempo de fondo. Para afrontar esta cuestión se propusieron dos posibilidades. Por una parte, Hawking [39] llevó a cabo los primeros intentos de construir un formalismo puramente covariante, invariante bajo transformaciones de gauge, que fue completado en la Ref. [137] para el caso de un fluido perfecto isoentrópico con secciones espaciales de curvatura plana. Estos trabajos sirven como punto de partida para la formulación covariante propuesta en la Ref. [138]. Por otra parte, Bardeen [40] halló cómo combinar las perturbaciones geométricas con las materiales para construir una familia de perturbaciones invariantes bajo ese tipo de transformaciones. Un estudio extensivo sobre potenciales invariantes bajo transformaciones de gauge puede encontrarse en las Refs. [36, 37, 101].

A pesar de que la teoría de perturbaciones cosmológicas da cuenta de la evolución de las inhomogeneidades que eventualmente han producido las estructuras a gran escala del universo, por sí misma no explica satisfactoriamente el origen de estas perturbaciones. Es necesario incluir hipótesis adicionales. Una posibilidad consiste en admitir

que el universo estuvo sujeto a una época inflacionaria o de rápida expansión en sus orígenes. Este paradigma [41] proporciona un marco natural para la generación de pequeñas inhomogeneidades, y además permite resolver algunos conflictos del modelo de gran explosión (o *big bang*), como los problemas de la planitud y el horizonte. Un escenario inflacionario se puede alcanzar simplemente introduciendo un hipotético campo escalar masivo como contenido material: el inflatón. Además, las fluctuaciones cuánticas de este campo pueden explicar la aparición de las perturbaciones primordiales.

Para llegar a entender satisfactoriamente este mecanismo de formación de estructuras, se necesita una descripción cuántica, o al menos semiclásica, de un escenario inflacionario. Pero, en ausencia de una teoría completa de la gravedad, nos vemos forzados, en una primera aproximación, a cuantizar las inhomogeneidades asumiendo que el espaciotiempo de fondo por el que se propagan se puede describir clásicamente. A pesar de tratarse de una simplificación importante, ya en esta situación uno tiene que enfrentarse a problemas serios, como son las ambigüedades de las que está plagada una teoría cuántica de campos en un espaciotiempo curvo. Estas ambigüedades están presentes incluso en el caso de campos lineales para los que puede aplicarse una cuantización de tipo Fock estándar. Para empezar, no está claro en absoluto cuáles son las variables fundamentales que se deben adoptar en el momento en que uno separa las perturbaciones respecto de los grados de libertad que describen el espaciotiempo de fondo, que son tratados de manera diferente. Al proceder a esa elección, las perturbaciones se pueden re-escalar utilizando funciones construidas a partir de las variables del fondo, dando lugar a una descripción alternativa que preserva el carácter lineal de las perturbaciones y que, desde un punto de vista clásico, es en principio igualmente válida. Incluso en el nivel cuántico, transformaciones de este estilo admiten una implementación unitaria si se aplican solamente a un número finito de grados de libertad. En tales circunstancias, la física que predicen ambas descripciones cuánticas es equivalente. Pero si la transformación afecta a un número infinito de grados de libertad, dos descripciones relacionadas por una transformación así no son, en general, unitariamente equivalentes (véanse las Secciones 4.4.1 y 5.4.1). Otra ambigüedad bien conocida al tratar la cuantización de campos en espaciotiempos curvos es la relacionada con la elección de una representación de Fock de las relaciones canónicas de conmutación. Como ya sabemos, esta libertad se puede codificar en una estructura compleja J . Recordemos que esta estructura permite generalizar el concepto de frecuencias positivas y negativas en teorías cuánticas de campos en espaciotiempos curvos. En los Capítulos 4 y 5, estudiamos ciertos criterios de unicidad para la cuantización de campos en espaciotiempos no estacionarios, que pueden ser aplicados a una amplia gama de escenarios cosmológicos, entre ellos el tipo de modelo que vamos a analizar en este capítulo. En particular, allí vimos que una cuantización de tipo Fock cuyo estado de vacío sea invariante ba-

jo las isometrías espaciales y que admita una implementación unitaria de la dinámica, pertenece forzosamente a una única familia de cuantizaciones, todas ellas unitariamente equivalentes entre sí. Y más aún, los criterios de invariancia espacial y evolución unitaria seleccionan un único par canónico para la descripción del campo, entre todos los relacionados mediante re-escalados por funciones del fondo dependientes del tiempo. Nuestra intención es demostrar que estos criterios son aplicables también a los campos que describen las perturbaciones cosmológicas, que vamos a estudiar en este capítulo, garantizando la unicidad de su cuantización de Fock y dotando a las predicciones de esta teoría cuántica de solidez y rigor.

Con esta motivación, realizaremos una descripción parcial del modelo en la que dejaremos de lado los fenómenos relacionados con la geometría cuántica, que se estudiarán en el Capítulo 7. Primero, en la Sección 6.1, daremos una descripción clásica del sistema. Asumiremos que es esencialmente homogéneo e isótropo 6.1.1, pero con pequeñas inhomogeneidades que serán tratadas como perturbaciones cosmológicas 6.1.2. En esta tesis sólo consideraremos perturbaciones de origen escalar. Veremos que el sistema resultante incorpora grados de libertad constreñidos (por la presencia de ligaduras), que se pueden eliminar si se introduce una fijación de gauge. En este capítulo estudiaremos dos de las posibles fijaciones: (i) la conocida como fijación de gauge longitudinal, y (ii) una fijación en la que las secciones espaciales son puramente homogéneas e isótropas (véanse las Secciones 6.2.1 y 6.2.2, respectivamente). El sistema resultante en ambos casos está descrito por la perturbación asociada al campo material. Finalmente, para cada fijación de gauge, incluiremos un re-escalado de dicha perturbación por el factor de escala del modelo homogéneo a través de una transformación canónica completa en el espacio de fases. Realizaremos un estudio detallado de la dinámica de la perturbación en la Sección 6.3. En la Sección 6.4 demostraremos que los criterios de unicidad estudiados en los Capítulos 4 y 5 se pueden aplicar a este sistema. Finalmente, probaremos que nuestra descripción es unitariamente equivalente a la proporcionada por ciertos invariantes de gauge, dados por potenciales de Bardeen (véase la Sección 6.5).

6.1. Sistema clásico

Consideremos un espaciotiempo globalmente hiperbólico, que admite una descomposición $3 + 1$ [60]. La métrica está determinada por la función lapso N , el vector desplazamiento N^a y una métrica espacial h_{ab} asociada a las secciones espaciales de tiempo t constante [véase la Ec. (1.1.1)], y que por conveniencia consideraremos que tienen la topología de una tres-esfera. Con esta descomposición de la geometría, la ac-

ción de Hilbert-Einstein (con términos de superficie adecuados) toma la expresión [61]

$$L_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x N \sqrt{h} [K_{ab} K^{ab} - (K^a_a)^2 + {}^3R], \quad (6.1.1)$$

donde h es el determinante de la métrica espacial, K_{ab} es la curvatura extrínseca de las secciones espaciales, definida en la Ec. (1.1.2), y 3R es el escalar de curvatura de esas secciones.

El lagrangiano total del sistema es la suma de L_g y la contribución material, que corresponderá a un campo escalar Φ de masa \tilde{m} . En términos de la descomposición $3 + 1$, toma la forma [42]

$$L_m = \frac{1}{2} \int d^3x \frac{\sqrt{h}}{N} \left[\left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 - 2N^a \partial_a \Phi \frac{d\Phi}{dt} - (N^2 h^{ab} - N^a N^b) \partial_a \Phi \partial_b \Phi - N^2 \tilde{m}^2 \Phi^2 \right], \quad (6.1.2)$$

donde ∂_a es la derivada plana respecto a la coordenada espacial x^a .

6.1.1. Escenario homogéneo e isótropo

Si imponemos homogeneidad e isotropía, el modelo de FLRW resultante queda descrito por un lapso N que sólo depende del tiempo, un vector desplazamiento $N^a = 0$, y una métrica espacial $h_{ab} = a^2(t) \bar{\Omega}_{ab}$ donde $a(t)$ es el factor de escala y $\bar{\Omega}_{ab}$ es la métrica espacial fiducial de una tres-esfera [y que coincide con el lado derecho de la Ec. (4.1.1) si seleccionamos las coordenadas espaciales correspondientes]. Adoptando la notación de la Ref. [42], introducimos la constante $\sigma = \sqrt{2G/3\pi}$ y reescribimos convenientemente el lapso de la forma $\sigma \bar{N}_0$, el factor de escala como σe^α , y el campo escalar como $\varphi/(\sqrt{2}\pi\sigma)$, con masa $\tilde{m} = m/\sigma$. La dinámica del sistema está completamente determinada por la ligadura hamiltoniana $\mathbb{H}_0 = \bar{N}_0 H_0$, con

$$H_0 = \frac{1}{2} e^{-3\alpha} (-\pi_\alpha^2 + \pi_\varphi^2 + e^{6\alpha} m^2 \varphi^2 - e^{4\alpha}). \quad (6.1.3)$$

Aquí, π_α y π_φ son los momentos canónicamente conjugados a α y φ , respectivamente. Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\alpha' = -\bar{N}_0 e^{-3\alpha} \pi_\alpha, \quad \pi'_\alpha = \frac{1}{2} \bar{N}_0 e^{-\alpha} (-3\pi_\alpha^2 + 3\pi_\varphi^2 - 3e^{6\alpha} m^2 \varphi^2 + e^{4\alpha}), \quad (6.1.4)$$

$$\varphi' = \bar{N}_0 e^{-3\alpha} \pi_\varphi, \quad \pi'_\varphi = -\bar{N}_0 e^{3\alpha} m^2 \varphi, \quad C_0 = 0. \quad (6.1.5)$$

De aquí en adelante, el símbolo $'$ indica la derivada con respecto al tiempo t .

6.1.2. Perturbaciones

A la hora de introducir perturbaciones alrededor de las soluciones homogéneas e isotropas, es conveniente expandirlas en modos utilizando la base de armónicos $Q^n = Q_{n\ell m}$ en la tres-esfera que ya utilizamos en el Capítulo 4, y que están definidos en el Apéndice B (para más detalles véanse las Refs. [42, 126, 128]). Recordemos que son autofunciones del operador de Laplace-Beltrami, con autovalor $-\omega_n^2$, donde $\omega_n^2 = n^2 - 1$, con $n = 1, 2, \dots$. Cada subespacio propio tiene una degeneración $g_n = n^2$, que está contemplada en las etiquetas $\ell = 1, \dots, n-1$ y $-\ell \leq m \leq \ell$. Como hicimos en el Capítulo 4, vamos a introducir la etiqueta \mathbf{n} para designar los tripletes formados por los tres índices n, ℓ y m . Puesto que las perturbaciones son funciones reales, resulta aconsejable utilizar una base de armónicos reales, que se obtiene de forma sencilla a partir de la parte real e imaginaria de Q^n , apropiadamente normalizadas. Para las funciones escalares usaremos los armónicos \tilde{Q}^n , para las vectoriales $(\tilde{P}_a)^n$ y para las tensoriales $(\tilde{P}_{ab})^n$, donde los dos últimos se han obtenido a partir de combinaciones lineales adecuadas de \tilde{Q}^n , $\bar{\Omega}_{ab}$ y sus derivadas (consúltese el Apéndice B). Esta base de armónicos no es completa en los espacios de campos vectoriales y tensoriales en la tres-esfera, ya que existen otros armónicos vectoriales y tensoriales que no se pueden deducir de éstos. Sin embargo, en esta tesis sólo vamos a considerar inhomogeneidades construidas a partir de perturbaciones escalares (y sus derivadas). Se puede ver, a través de un análisis completo [42], que tales perturbaciones están completamente desacopladas de las que son genuinamente vectoriales y tensoriales, por lo que la restricción que estudiamos es consistente.

El modo $n = 1$ se corresponde con los grados de libertad homogéneos. Para el resto de modos tenemos que

$$h_{ij} = \sigma^2 e^{2\alpha} \bar{\Omega}_{ij} \left(1 + 2\sqrt{2} \pi \epsilon \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \tilde{Q}^n \right) + \sigma^2 e^{2\alpha} 6\sqrt{2} \pi \epsilon \sum_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}} (\tilde{P}_{ij})^n, \quad (6.1.6a)$$

$$N = \sigma \bar{N}_0 \left(1 + \sqrt{2} \pi \epsilon \sum_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}} \tilde{Q}^n \right), \quad N_i = \sigma^2 e^{\alpha} \sqrt{2} \pi \epsilon \sum_{\mathbf{n}} k_{\mathbf{n}} (\tilde{P}_i)^n, \quad (6.1.6b)$$

$$\Phi = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \pi} \varphi + \epsilon \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} \tilde{Q}^n \right), \quad (6.1.6c)$$

donde ϵ es un parámetro perturbativo. Todas estas sumas empiezan en $n = 2$, excepto la contribución de la métrica con coeficientes $b_{\mathbf{n}}$, que empieza a partir de $n = 3$, ya que el armónico tensorial correspondiente a $n = 2$ resulta ser proporcional a $\bar{\Omega}_{ij}$. En resumen, las funciones \bar{N}_0 , α , y φ parametrizan el espacio de configuración homogéneo, mientras que $a_{\mathbf{n}}$, $b_{\mathbf{n}}$, $g_{\mathbf{n}}$, $k_{\mathbf{n}}$ y $f_{\mathbf{n}}$ describen las inhomogeneidades. Todas ellas son funciones únicamente dependientes del tiempo. Asumiremos que las perturbaciones son

suficientemente pequeñas como para justificar un análisis perturbativo hasta segundo orden en el parámetro ϵ (es decir, hasta segundo orden en las inhomogeneidades).

Si introducimos las expresiones (6.1.6) en las Ecs. (6.1.1) y (6.1.2), es posible deducir el lagrangiano del sistema perturbado [42]. Aplicando una transformación de Legendre respecto a las derivadas temporales de las variables de configuración, llegamos a un hamiltoniano de la forma

$$\mathbb{H} = \bar{N}_0 \left[H_0 + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} (H_{|2}^{\mathbf{n}} + g_{\mathbf{n}} H_{|1}^{\mathbf{n}}) \right] + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} k_{\mathbf{n}} H_{-1}^{\mathbf{n}} + O(\epsilon^3), \quad (6.1.7)$$

que es una combinación lineal de ligaduras, con \bar{N}_0 , $\bar{N}_0 g_{\mathbf{n}}$, y $k_{\mathbf{n}}$ como multiplicadores de Lagrange. Asimismo, $H_{|1}^{\mathbf{n}}$ y $H_{|2}^{\mathbf{n}}$ son las ligaduras escalares (designadas por el símbolo $|$) de orden ϵ y ϵ^2 en las perturbaciones (como indica el subíndice), respectivamente, y $H_{-1}^{\mathbf{n}}$ es la ligadura de momentos o difeomorfismos ($-$) de orden ϵ en la expansión perturbativa.

Si llamamos π_q al momento canónicamente conjugado a la variable q ,¹ podemos ver que H_0 se corresponde con la expresión (6.1.3), mientras que el resto de ligaduras están dadas por

$$\begin{aligned} H_{|2}^{\mathbf{n}} = & \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left[\left(\frac{1}{2} a_{\mathbf{n}}^2 + 10 \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} b_{\mathbf{n}}^2 \right) \pi_{\alpha}^2 + \left(\frac{15}{2} a_{\mathbf{n}}^2 + 6 \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} b_{\mathbf{n}}^2 \right) \pi_{\varphi}^2 \right. \\ & - \pi_{a_{\mathbf{n}}}^2 + \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \pi_{b_{\mathbf{n}}}^2 + (2a_{\mathbf{n}} \pi_{a_{\mathbf{n}}} + 8b_{\mathbf{n}} \pi_{b_{\mathbf{n}}}) \pi_{\alpha} + \pi_{f_{\mathbf{n}}}^2 - 6a_{\mathbf{n}} \pi_{\varphi} \pi_{f_{\mathbf{n}}} \\ & - e^{4\alpha} \left\{ \frac{1}{3} (n^2 - \frac{5}{2}) a_{\mathbf{n}}^2 + \frac{1}{3} (n^2 - 7) \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} b_{\mathbf{n}}^2 + \frac{2}{3} (n^2 - 4) a_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}} - (n^2 - 1) f_{\mathbf{n}}^2 \right\} \\ & \left. + e^{6\alpha} m^2 \left(\frac{3}{2} \varphi^2 a_{\mathbf{n}}^2 - 6 \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} \varphi^2 b_{\mathbf{n}}^2 + 6\varphi a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} + f_{\mathbf{n}}^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

$$\begin{aligned} H_{|1}^{\mathbf{n}} = & \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left[-a_{\mathbf{n}} \pi_{\alpha}^2 - 3a_{\mathbf{n}} \pi_{\varphi}^2 - 2\pi_{\alpha} \pi_{a_{\mathbf{n}}} + 2\pi_{\varphi} \pi_{f_{\mathbf{n}}} - \frac{2}{3} e^{4\alpha} [(n^2 + \frac{1}{2}) a_{\mathbf{n}} + (n^2 - 4) b_{\mathbf{n}}] \right. \\ & \left. + e^{6\alpha} m^2 \varphi (3\varphi a_{\mathbf{n}} + 2f_{\mathbf{n}}) \right], \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

$$H_{-1}^{\mathbf{n}} = \frac{1}{3} e^{-\alpha} \left[\left(a_{\mathbf{n}} + 4 \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} b_{\mathbf{n}} \right) \pi_{\alpha} + 3f_{\mathbf{n}} \pi_{\varphi} - \pi_{a_{\mathbf{n}}} + \pi_{b_{\mathbf{n}}} \right]. \quad (6.1.10)$$

¹En el caso de las perturbaciones, los corchetes de Poisson entre los coeficientes de los modos inhomogéneos y sus momentos se toman proporcionales a $1/\epsilon^2$.

6.2. Fijación de gauge y transformación canónica

La presencia de ligaduras indica la existencia de grados de libertad que no son físicos. Una manera de eliminarlos es adoptando una fijación de gauge. En esta sección vamos a presentar dos fijaciones de gauge diferentes: gauge longitudinal, muy utilizado en el estudio de perturbaciones cosmológicas, y un gauge en el que las perturbaciones de la métrica espacial se anulan. Además, por conveniencia y con la vista puesta en los resultados de unicidad, vamos a introducir un re-escalado de las perturbaciones que describen el sistema reducido por medio de una transformación canónica completa en el sistema. Veremos que al final llegamos a los mismos resultados cualitativos en los dos gauges considerados.

6.2.1. Gauge longitudinal

Más específicamente, vamos a eliminar la libertad asociada a los multiplicadores de Lagrange g_n y k_n relacionados con las ligaduras $H_{|1}^n = 0$ y $H_{-1}^n = 0$, respectivamente, introduciendo las condiciones $N_i = 0$ y $h_{ij} \propto \bar{\Omega}_{ij}$. Una forma de hacerlo es exigiendo

$$b_n = 0, \quad H_n \equiv -a_n \pi_\alpha - 3f_n \pi_\varphi + \pi_{a_n} = 0. \quad (6.2.1)$$

Se trata de condiciones buenas para fijar el gauge siempre que $n > 2$, porque sus corchetes de Poisson con H_{-1}^n y $H_{|1}^n$ satisfacen

$$\epsilon^4 \det \begin{pmatrix} \{b_n, H_{-1}^n\} & \{H_n, H_{-1}^n\} \\ \{b_n, H_{|1}^n\} & \{H_n, H_{|1}^n\} \end{pmatrix} \approx \frac{1}{9}(n^2 - 4) > 0. \quad (6.2.2)$$

El símbolo \approx indica que la identidad se satisface después de hacer uso de las ligaduras y las condiciones de fijación de gauge (6.2.1). Esto además nos permite escribir a_n y π_{b_n} en términos de f_n , π_{f_n} y de las variables homogéneas. En particular

$$a_n \approx 3 \frac{(e^{6\alpha} m^2 \varphi - 3\pi_\alpha \pi_\varphi) f_n + \pi_\varphi \pi_{f_n}}{9\pi_\varphi^2 + (n^2 - 4)e^{4\alpha}} + O(\epsilon^2), \quad (6.2.3)$$

mientras que $\pi_{b_n} = 0$. Además, si las condiciones de fijación de gauge son dinámicamente estables, se debe cumplir

$$0 = \{b_n, \mathbb{H}\} \approx \frac{1}{3} e^{-\alpha} k_n + O(\epsilon), \quad 0 = \{H_n, \mathbb{H}\} \approx \frac{1}{3} (n^2 - 4) \bar{N}_0 e^\alpha (a_n + g_n) + O(\epsilon). \quad (6.2.4)$$

Consecuentemente, deducimos que $k_n = 0$ y $g_n = -a_n$, salvo correcciones perturbativas de orden superior.

En el caso $n = 2$, las condiciones (6.2.1) no se pueden aplicar ya que, por construcción, los coeficientes b_n sólo existen para $n > 2$. En realidad, siempre es posible utilizar la condición $a_{2\ell m} = f_{2\ell m} = 0$ para este modo, por lo que no aporta grados de libertad físicos.

Una vez que hemos fijado esta condición de gauge, la métrica del espaciotiempo toma la forma

$$ds^2 = -\sigma^2 \bar{N}_0^2 \left(1 - 2\sqrt{2} \pi \epsilon \sum_n a_n \tilde{Q}^n \right) dt^2 + \sigma^2 e^{2\tilde{\alpha}} \bar{\Omega}_{ij} \left(1 + 2\sqrt{2} \pi \epsilon \sum_n a_n \tilde{Q}^n \right) dx^i dx^j + O(\epsilon^2). \quad (6.2.5)$$

A la hora de reducir el sistema, es más conveniente introducir coordenadas nuevas en el espacio de fases, de tal modo que formen un conjunto de variables canónicamente conjugadas con respecto a la estructura simpléctica del sistema reducido. Esta nueva transformación dejará intactas π_α , π_φ y f_n , pero sus variables canónicas pasan a ser

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_n a_n^2, \quad (6.2.6a)$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi + 3\epsilon^2 \sum_n a_n f_n, \quad (6.2.6b)$$

$$\tilde{\pi}_{f_n} = \pi_{f_n} - 3a_n \pi_\varphi. \quad (6.2.6c)$$

En cuanto al hamiltoniano reducido, toma la forma

$$\tilde{\mathbb{H}} = \bar{N}_0 \left(\tilde{H}_0 + \epsilon^2 \sum_n \tilde{H}_{|2}^n \right) + O(\epsilon^3). \quad (6.2.7)$$

Como vemos, las nuevas variables homogéneas se diferencian de las antiguas en un término cuadrático en las perturbaciones, por lo que el hamiltoniano de orden cero no se ve afectado por esta transformación y sigue correspondiéndose con el lado derecho de la Ec. (6.1.3), pero reemplazando las antiguas variables por las nuevas, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\varphi}$. La contribución de segundo orden en el hamiltoniano es de la forma

$$\tilde{H}_{|2}^n = \frac{1}{2} e^{-\tilde{\alpha}} \left(\tilde{E}_{\pi\pi}^n \tilde{\pi}_{f_n}^2 + 2\tilde{E}_{f\pi}^n f_n \tilde{\pi}_{f_n} + \tilde{E}_{ff}^n f_n^2 \right), \quad (6.2.8)$$

donde hemos introducido la notación

$$\tilde{E}_{\pi\pi}^n = e^{-2\tilde{\alpha}} \left(1 - \frac{3e^{-4\tilde{\alpha}}}{n^2 - 4} \pi_\varphi^2 \right), \quad (6.2.9a)$$

$$\tilde{E}_{f\pi}^n = \frac{3}{n^2 - 4} e^{-6\tilde{\alpha}} \pi_\varphi (3\pi_\alpha \pi_\varphi - e^{6\tilde{\alpha}} m^2 \tilde{\varphi}), \quad (6.2.9b)$$

$$\tilde{E}_{ff}^n = e^{2\tilde{\alpha}} (n^2 - 1) + e^{4\tilde{\alpha}} m^2 - 9e^{-2\tilde{\alpha}} \pi_\varphi^2 - \frac{3}{n^2 - 4} e^{-6\tilde{\alpha}} (3\pi_\alpha \pi_\varphi - e^{6\tilde{\alpha}} m^2 \tilde{\varphi})^2. \quad (6.2.9c)$$

Transformación canónica

Vamos a introducir una transformación canónica que nos va a permitir reformular el sistema de una forma especialmente adecuada. En primer lugar, realizamos un re-escalado de la perturbación material por el factor de escala del espaciotiempo de fondo: $f_{\mathbf{n}} \mapsto e^\alpha f_{\mathbf{n}}$. Esta transformación es conocida como re-escalado de Mukhanov (ver por ejemplo la Ref. [37]) y suele ser adoptada frecuentemente, ya que permite simplificar las ecuaciones de movimiento. Para introducir el re-escalado por medio de una transformación canónica, aplicamos el re-escalado inverso de su momento. Además, permitimos que se añada al momento un término lineal en el campo. Este término nos va a permitir eliminar una contribución a la acción no deseada, proporcional al producto de la perturbación con su momento (al menos hasta órdenes subdominantes en el régimen de n grande). Aparte de simplificar la descripción del sistema, lo adaptamos al estudio sobre la aplicabilidad de los criterios de unicidad de su cuantización. En resumen, las nuevas variables que vamos a introducir en el sistema, y que son canónicas bajo los corchetes de Poisson hasta el orden perturbativo considerado, son

$$\bar{\alpha} = \tilde{\alpha} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}^2, \quad \bar{\pi}_{\bar{\alpha}} = \pi_{\alpha} + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} (-f_{\mathbf{n}} \tilde{\pi}_{f_{\mathbf{n}}} + \pi_{\alpha} f_{\mathbf{n}}^2), \quad (6.2.10a)$$

$$\bar{f}_{\mathbf{n}} = e^{\tilde{\alpha}} f_{\mathbf{n}}, \quad \bar{\pi}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} = e^{-\tilde{\alpha}} (\tilde{\pi}_{f_{\mathbf{n}}} - \pi_{\alpha} f_{\mathbf{n}}), \quad (6.2.10b)$$

mientras que $\tilde{\varphi}$ y π_{φ} permanecen inalteradas.

En términos de estas nuevas variables, el hamiltoniano tiene la misma estructura que la de las Ecs. (6.2.7) y (6.2.8), y la forma funcional del hamiltoniano de orden cero se preserva [véase la Ec. (6.1.3)]. Por otro lado, los coeficientes del hamiltoniano de segundo orden en las perturbaciones del sistema reducido son ahora

$$\bar{E}_{\pi\pi}^n = 1 - \frac{3}{n^2 - 4} e^{-4\bar{\alpha}} \pi_{\varphi}^2, \quad (6.2.11a)$$

$$\bar{E}_{f\pi}^n = \frac{3}{n^2 - 4} e^{-6\bar{\alpha}} \pi_{\varphi} (2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} \pi_{\varphi} - e^{6\bar{\alpha}} m^2 \tilde{\varphi}), \quad (6.2.11b)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ff}^n = & n^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2\bar{\alpha}} m^2 (2 - 3\tilde{\varphi}^2) - \frac{1}{2} e^{-4\bar{\alpha}} (\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2 + 15\pi_{\varphi}^2) \\ & - \frac{3}{n^2 - 4} e^{-8\bar{\alpha}} (2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} \pi_{\varphi} - e^{6\bar{\alpha}} m^2 \tilde{\varphi})^2. \end{aligned} \quad (6.2.11c)$$

De este modo hemos sido capaces de implementar el re-escalado de Mukhanov sin introducir términos cruzados indeseables, de manera que $\bar{E}_{f\pi}^n = O(n^{-2})$, al igual que $\bar{E}_{f\pi}^n$ en la Ec. (6.2.9b).

Podemos incluso dar la expresión de $a_{\mathbf{n}}$ en función de estas nuevas variables

$$a_{\mathbf{n}} = \frac{3}{n^2 - 4} [e^{-5\bar{\alpha}} (e^{6\bar{\alpha}} m^2 \tilde{\varphi} - 2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} \pi_{\varphi}) \bar{f}_{\mathbf{n}} + e^{-3\bar{\alpha}} \pi_{\varphi} \bar{\pi}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}] . \quad (6.2.12)$$

Teniendo esto en cuenta, la métrica espaciotemporal se puede calcular de manera sencilla a través de la Ec. (6.2.5).

Finalmente, para completar el análisis clásico de este sistema reducido, podemos calcular las ecuaciones de movimiento. Vamos a asumir tiempo conforme, η , definido por $\bar{N}_0 dt = e^\alpha d\eta$. Las derivadas respecto del mismo se designarán con un punto sobre la función. El resultado es

$$\dot{\bar{\alpha}} = -e^{-2\bar{\alpha}}\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} + O(\epsilon^2), \quad \dot{\bar{\pi}}_{\bar{\alpha}} = \frac{e^{-2\bar{\alpha}}}{2}(3\pi_\varphi^2 - 3\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2 - 3e^{6\bar{\alpha}}m^2\tilde{\varphi}^2 + e^{4\bar{\alpha}}) + O(\epsilon^2) \quad (6.2.13a)$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = e^{-2\alpha}\pi_\varphi + O(\epsilon^2), \quad \dot{\pi}_\varphi = -e^{4\alpha}m^2\tilde{\varphi} + O(\epsilon^2), \quad (6.2.13b)$$

$$\dot{\bar{f}}_{\mathbf{n}} = (\bar{E}_{\pi\pi}^n \bar{\pi}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} + \bar{E}_{f\pi}^n \bar{f}_{\mathbf{n}}) + O(\epsilon), \quad \dot{\bar{\pi}}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} = -(\bar{E}_{f\pi}^n \bar{\pi}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} + \bar{E}_{ff}^n \bar{f}_{\mathbf{n}}) + O(\epsilon). \quad (6.2.13c)$$

Usando las Ecs. (6.2.13c), podemos despejar $\bar{\pi}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}$ y escribirlo como

$$\bar{\pi}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} = (1 + p_n)\dot{\bar{f}}_{\mathbf{n}} + q_n \bar{f}_{\mathbf{n}}, \quad (6.2.14)$$

despreciando correcciones perturbativas de orden superior al considerado, y donde hemos introducido los coeficientes dependientes del tiempo

$$p_n = \frac{3\pi_\varphi^2}{(n^2 - 4)e^{4\bar{\alpha}} - 3\pi_\varphi^2}, \quad q_n = -3e^{-2\bar{\alpha}}\pi_\varphi \frac{2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}\pi_\varphi - e^{6\bar{\alpha}}m^2\tilde{\varphi}}{(n^2 - 4)e^{4\bar{\alpha}} - 3\pi_\varphi^2}. \quad (6.2.15)$$

Combinando estas ecuaciones, podemos deducir la ecuación de movimiento de segundo orden para $\bar{f}_{\mathbf{n}}$:

$$\left(\frac{\dot{\bar{E}}_{\pi\pi}^n}{\bar{E}_{\pi\pi}^n} \bar{E}_{f\pi}^n - \dot{\bar{E}}_{f\pi}^n - (\bar{E}_{f\pi}^n)^2 + \bar{E}_{ff}^n \bar{E}_{\pi\pi}^n \right) \bar{f}_{\mathbf{n}} - \frac{\dot{\bar{E}}_{\pi\pi}^n}{\bar{E}_{\pi\pi}^n} \dot{\bar{f}}_{\mathbf{n}} + \ddot{\bar{f}}_{\mathbf{n}} = O(\epsilon), \quad (6.2.16)$$

que se puede reescribir (despreciando de nuevo correcciones de órdenes superiores) como

$$\ddot{\bar{f}}_{\mathbf{n}} + r_n \dot{\bar{f}}_{\mathbf{n}} + (\omega_n^2 + s_n) \bar{f}_{\mathbf{n}} = 0, \quad (6.2.17)$$

donde

$$r_n = 6e^{-2\bar{\alpha}}\pi_\varphi \frac{2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}\pi_\varphi - e^{6\bar{\alpha}}m^2\tilde{\varphi}}{(n^2 - 4)e^{4\bar{\alpha}} - 3\pi_\varphi^2}, \quad (6.2.18a)$$

$$s_n = \frac{1}{2} + e^{2\bar{\alpha}}m^2 - \frac{1}{2}e^{-4\bar{\alpha}}(\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2 + 21\pi_\varphi^2 + 3e^{6\bar{\alpha}}m\tilde{\varphi}^2) + O(n^{-2}). \quad (6.2.18b)$$

6.2.2. Fijación de gauge alternativa

Otra fijación de gauge admisible es aquélla en la que las perturbaciones de la métrica h_{ab} son nulas. En este caso, introducimos las condiciones

$$a_{\mathbf{n}} = 0 = b_{\mathbf{n}}, \quad (6.2.19)$$

Para asegurarnos de que son aceptables, debemos de calcular sus corchetes de Poisson con las ligaduras que se van a fijar, es decir $H_{|1}^n$ y H_{-1}^n . El resultado es

$$\epsilon^4 \det \begin{pmatrix} \{a_n, H_{-1}^n\} & \{b_n, H_{-1}^n\} \\ \{a_n, H_{|1}^n\} & \{b_n, H_{|1}^n\} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} e^{-4\alpha} \pi_\alpha, \quad (6.2.20)$$

que solamente se anula si $\pi_\alpha = 0$. En tanto en cuanto podamos eludir ese punto (o, más correctamente, esa sección del espacio de fases Γ), la condición de gauge será admisible. Debemos asegurarnos también de que esas condiciones son estables dinámicamente, lo que introduce las condiciones adicionales

$$0 = \{a_n, \mathbb{H}\} \approx -\bar{N}_0 e^{-3\alpha} (\pi_{a_n} + g_n \pi_\alpha) - \frac{1}{3} e^{-\alpha} k_n + O(\epsilon), \quad (6.2.21a)$$

$$0 = \{b_n, \mathbb{H}\} \approx \bar{N}_0 e^{-3\alpha} \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \pi_{b_n} + \frac{1}{3} e^{-\alpha} k_n + O(\epsilon). \quad (6.2.21b)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver, fijando así los multiplicadores de Lagrange g_n y k_n . Además, la imposición de las ligaduras H_{-1}^n y $H_{|1}^n$, junto con las condiciones (6.2.19), permiten determinar π_{a_n} y π_{b_n} . El resultado es

$$\pi_{a_n} = \frac{1}{\pi_\alpha} (\pi_\varphi \pi_{f_n} + e^{6\alpha} m^2 \varphi f_n), \quad \pi_{b_n} = \frac{1}{\pi_\alpha} [\pi_\varphi \pi_{f_n} - (3\pi_\alpha \pi_\varphi - e^{6\alpha} m^2 \varphi) f_n]. \quad (6.2.22)$$

Una vez que hemos reducido el sistema, el hamiltoniano tiene la misma estructura que aparece en la Ec. (6.2.7). El hamiltoniano de orden cero sigue siendo el mismo y está dado por la Ec. (6.1.3), mientras que el hamiltoniano de segundo orden en las perturbaciones toma la forma (6.2.8) pero con coeficientes

$$E_{\pi\pi}^n = e^{-2\alpha} \left(1 + \frac{3}{n^2 - 4} \frac{\pi_\varphi^2}{\pi_\alpha^2} \right), \quad (6.2.23a)$$

$$E_{f\pi}^n = -3e^{-2\alpha} \left[\frac{\pi_\varphi^2}{\pi_\alpha} + \frac{1}{n^2 - 4} \frac{\pi_\varphi}{\pi_\alpha^2} (3\pi_\alpha \pi_\varphi - e^{6\alpha} m^2 \varphi) \right], \quad (6.2.23b)$$

$$E_{ff}^n = e^{2\alpha} (n^2 - 1) + e^{-2\alpha} \left(9\pi_\varphi^2 - 6e^{6\alpha} m^2 \varphi \frac{\pi_\varphi}{\pi_\alpha} \right) + e^{4\alpha} m^2 + \frac{3e^{-2\alpha}}{n^2 - 4} \frac{1}{\pi_\alpha^2} (3\pi_\alpha \pi_\varphi - e^{6\alpha} m^2 \varphi)^2. \quad (6.2.23c)$$

Transformación canónica

Vamos a introducir el re-escalado de Mukhanov, al igual que hicimos en la sección anterior, mediante una transformación canónica en el espacio de fases completo. Las

nuevas variables, hasta el orden perturbativo correcto, son

$$\bar{\alpha} = \alpha - \frac{\epsilon^2}{2} \left(3 \frac{\pi_\varphi^2}{\pi_\alpha^2} - 1 \right) \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}^2, \quad (6.2.24a)$$

$$\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} = \pi_\alpha + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \left[-f_{\mathbf{n}} \pi_{f_{\mathbf{n}}} + \left(3 \frac{\pi_\varphi^2}{\pi_\alpha} + \pi_\alpha \right) f_{\mathbf{n}}^2 \right], \quad (6.2.24b)$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + 3\epsilon^2 \frac{\pi_\varphi}{\pi_\alpha} \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}^2, \quad (6.2.24c)$$

$$\bar{f}_{\mathbf{n}} = e^\alpha f_{\mathbf{n}}, \quad \bar{\pi}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} = e^{-\alpha} \left[\pi_{f_{\mathbf{n}}} - \left(3 \frac{\pi_\varphi^2}{\pi_\alpha} + \pi_\alpha \right) f_{\mathbf{n}} \right], \quad (6.2.24d)$$

mientras que π_φ no varía. Esta transformación no modifica la estructura del hamiltoniano reducido (6.2.7), y además absorbe la contribución dominante en el límite de n grande del término cruzado que acopla la perturbación del campo con su momento conjugado. Los nuevos coeficientes del hamiltoniano de segundo orden en las perturbaciones (6.2.8) son ahora

$$\bar{E}_{\pi\pi}^n = 1 + \frac{3}{n^2 - 4} \frac{\pi_\varphi^2}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2}, \quad (6.2.25a)$$

$$\bar{E}_{f\pi}^n = \frac{3e^{-2\bar{\alpha}}}{n^2 - 4} \frac{\pi_\varphi}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2} \left(3 \frac{\pi_\varphi^3}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} - 2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}\pi_\varphi + e^{6\bar{\alpha}}m^2\bar{\varphi} \right), \quad (6.2.25b)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ff}^n = & n^2 - \frac{1}{2} + e^{2\bar{\alpha}}m^2 - \frac{3}{2} \frac{\pi_\varphi^2}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2} - \frac{1}{2} e^{-4\bar{\alpha}} (\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2 - 30\pi_\varphi^2) \\ & - \frac{1}{2} e^{-4\bar{\alpha}} \left\{ 27 \frac{\pi_\varphi^4}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2} + 3e^{6\bar{\alpha}}m^2\bar{\varphi} \left[8 \frac{\pi_\varphi}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} - \bar{\varphi} \left(3 \frac{\pi_\varphi^2}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2} - 1 \right) \right] \right\} \\ & + \frac{3}{(n^2 - 4)} \frac{e^{-4\bar{\alpha}}}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2} \left(3 \frac{\pi_\varphi^3}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} - 2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}\pi_\varphi + e^{6\bar{\alpha}}m^2\bar{\varphi} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.2.25c)$$

mientras que el hamiltoniano de orden cero conserva la forma funcional (6.1.3). De las ecuaciones de Hamilton en tiempo conforme es posible deducir que el momento $\bar{\pi}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}$ sigue dado por la Ec. (6.2.14), pero ahora con

$$p_n = - \frac{3\pi_\varphi^2}{(n^2 - 4)\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2 + 3\pi_\varphi^2}, \quad (6.2.26a)$$

$$q_n = -3e^{-2\bar{\alpha}}\pi_\varphi \frac{3(\pi_\varphi^3/\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}) - 2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}\pi_\varphi + e^{6\bar{\alpha}}m^2\bar{\varphi}}{(n^2 - 4)\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2 + 3\pi_\varphi^2}. \quad (6.2.26b)$$

Respecto a la ecuación de movimiento de $\bar{f}_{\mathbf{n}}$, la Ec. (6.2.17) sigue siendo válida, sólo que debemos redefinir sus coeficientes como

$$r_n = 3e^{-2\alpha} \frac{\pi_\varphi}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} \frac{3\pi_\varphi^3 - 3\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2\pi_\varphi + e^{6\alpha}m^2\bar{\varphi}(2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} - 3\bar{\varphi}\pi_\varphi) + e^{4\bar{\alpha}}\pi_\varphi}{(n^2 - 4)\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2 + 3\pi_\varphi^2}, \quad (6.2.27a)$$

$$s_n = \frac{1}{2} + e^{2\bar{\alpha}} m^2 + \frac{3}{2} \frac{\pi_\varphi^2}{\bar{\pi}_\alpha^2} - \frac{1}{2} e^{-4\bar{\alpha}} \left(\bar{\pi}_\alpha^2 - 30\pi_\varphi^2 + 27 \frac{\pi_\varphi^4}{\bar{\pi}_\alpha^2} \right) \quad (6.2.27b)$$

$$- \frac{1}{2} e^{-4\bar{\alpha}} \left[24e^{6\bar{\alpha}} m^2 \bar{\varphi} \frac{\pi_\varphi}{\bar{\pi}_\alpha} - 3e^{6\bar{\alpha}} m^2 \bar{\varphi}^2 \left(3 \frac{\pi_\varphi^2}{\bar{\pi}_\alpha^2} - 1 \right) \right] + O(n^{-2}).$$

Resaltamos que las expresiones para p_n , q_n , r_n y s_n en este gauge tienen el mismo comportamiento asintótico que los correspondientes al gauge longitudinal visto en la sección anterior.

6.3. Dinámica clásica

Como hemos visto, tras cualquiera de las dos fijaciones de gauge descritas anteriormente, la ecuación de movimiento que satisface la perturbación del campo material 6.2.17 difiere de la de un campo escalar sujeto a un potencial dependiente del tiempo en un espaciotiempo estático en las contribuciones r_n y s_n –incluyendo las correcciones $O(n^{-2})$ –, definidas en las Ecs. (6.2.18a)-(6.2.18b), y (6.2.27a)-(6.2.27b), para cada fijación de gauge, respectivamente.

Para deducir el comportamiento asintótico de estas soluciones vamos a realizar un estudio análogo al ya realizado en la Sección 4.1.2. Para ello, recordemos que las soluciones reales a la Ec. 6.2.17 se pueden reexpresar de la forma

$$\bar{f}_n(\eta) = A_n e^{\omega_n \Theta_n(\eta)} + A_n^* e^{\omega_n \Theta_n^*(\eta)}, \quad (6.3.1)$$

donde A_n es cierto número complejo que está determinado por las condiciones iniciales de \bar{f}_n y su derivada. La función Θ_n se puede elegir satisfactoriamente de manera que satisfaga las condiciones iniciales $\Theta_n(\eta_0) = 0$ y $\dot{\Theta}_n(\eta_0) = -i$. Estas condiciones conducen a la siguiente relación con los datos iniciales:

$$A_n = \frac{1}{2\omega_n} [\omega_n \bar{f}_n(\eta_0) + i \dot{\bar{f}}_n(\eta_0)]. \quad (6.3.2)$$

Conviene reescribir Θ_n como

$$\Theta_n(\eta) = -i(\eta - \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{W_n(\bar{\eta})}{\omega_n} d\bar{\eta}. \quad (6.3.3)$$

La función W_n satisface la condición $W_n(\eta_0) = 0$. Si introducimos todo esto en la Ec. (6.2.17), deducimos que la ecuación que cumple W_n es

$$\dot{W}_n = i\omega_n r_n - s_n + (2i\omega_n - r_n)W_n - W_n^2. \quad (6.3.4)$$

Al igual que hicimos en la Sección 4.1.2, un análisis asintótico de esta ecuación en el límite de n grande nos permite concluir que sus soluciones son, como mucho, de orden n^{-1} . Si despreciamos aquellas correcciones de orden superior (entre ellas el término

W_n^2), la ecuación resultante es justo (4.1.17), pero con $s(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\eta)$. Teniendo en cuenta la condición inicial $W_n(\eta_0) = 0$, las soluciones a esta ecuación están dadas justamente por la Ec. (4.1.19). Asumiendo que la función $s(\eta)$ es diferenciable y que su derivada $\dot{s}(\eta)$ es integrable en cualquier subintervalo cerrado del intervalo de definición del tiempo η , podemos comprobar que realmente la solución es del orden de n^{-1} .

Con la vista puesta en un análisis de la dinámica dentro de una cuantización de tipo Fock, introducimos las siguientes variables de creación y destrucción asociadas a esta perturbación:

$$\begin{pmatrix} a_{\bar{f}_n} \\ a_{\bar{f}_n}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \begin{pmatrix} \omega_n & i \\ \omega_n & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f}_n \\ \bar{\pi}_{\bar{f}_n} \end{pmatrix}, \quad (6.3.5)$$

Puesto que los modos satisfacen ecuaciones de movimiento desacopladas unas de otras, la dinámica se codifica en una transformación canónica \mathcal{U} diagonal por bloques, tal que

$$\begin{pmatrix} a_{\bar{f}_n}(\eta) \\ a_{\bar{f}_n}^*(\eta) \end{pmatrix} = \mathcal{U}_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} a_{\bar{f}_n}(\eta_0) \\ a_{\bar{f}_n}^*(\eta_0) \end{pmatrix}. \quad (6.3.6)$$

Aquí, η_0 es un tiempo inicial dado. Las matrices \mathcal{U}_n sólo dependen de n , pero no de los índices ℓ y m , del mismo modo que ocurría con 6.2.17. Puesto que \mathcal{U} es una transformación real, las matrices \mathcal{U}_n que la determinan tienen la forma (4.1.22), con los coeficientes $\alpha_n(\eta, \eta_0)$ y $\beta_n(\eta, \eta_0)$ dados por

$$\alpha_n(\eta, \eta_0) = \frac{1}{1 + p_n(\eta_0)} \left\{ e^{\omega_n \Theta_n(\eta)} [1 + D_n(\eta)] [1 + B_n(\eta_0)] - e^{\omega_n \Theta_n^*(\eta)} D_n^*(\eta) B_n^*(\eta_0) \right\}, \quad (6.3.7a)$$

$$\beta_n(\eta, \eta_0) = \frac{1}{1 + p_n(\eta_0)} \left\{ e^{\omega_n \Theta_n(\eta)} [1 + D_n(\eta)] B_n(\eta_0) - e^{\omega_n \Theta_n^*(\eta)} D_n^*(\eta) [1 + B_n^*(\eta_0)] \right\}, \quad (6.3.7b)$$

donde

$$B_n = \frac{1}{2} \left(p_n - i \frac{q_n}{\omega_n} \right), \quad D_n = B_n^* + \frac{i}{2} (1 + p_n) \frac{W_n}{\omega_n}. \quad (6.3.8)$$

Dependiendo de la fijación de gauge, las funciones p_n y q_n están dadas por la Ec. (6.2.15) o por (6.2.26).

6.4. Unicidad de la cuantización de perturbaciones en inflación

En primer lugar, consideramos la representación que está asociada a la elección de variables de creación y destrucción definidas en la Ec. (6.3.5). Esta representación viene

determinada por una estructura compleja j_0 que satisface

$$j_0 \begin{pmatrix} a_{\bar{f}_n} \\ a_{\bar{f}_n}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\bar{f}_n} \\ a_{\bar{f}_n}^* \end{pmatrix}, \quad (6.4.1)$$

que es precisamente la estructura compleja que correspondería de forma natural al caso de un campo escalar sin masa (véase la Sección 4.2). Es invariante bajo el grupo de isometrías espaciales $SO(4)$, lo que nos asegura que dicho grupo se implementa en la teoría cuántica de manera unitaria. Por otro lado, la evolución dinámica del sistema desde el tiempo de referencia η_0 a otro tiempo conforme η viene dada por la transformación $\mathcal{U}(\eta, \eta_0)$, que admite también una implementación unitaria si y sólo si sus correspondientes coeficientes de Bogoliubov $\beta_n(\eta, \eta_0)$ son de cuadrado sumable:

$$\sum_n |\beta_n(\eta, \eta_0)|^2 = \sum_n g_n |\beta_n(\eta, \eta_0)|^2 < \infty. \quad (6.4.2)$$

Hemos utilizado que $\beta_n(\eta, \eta_0)$ no depende ni del índice ℓ ni de m , sino sólo del autovalor del operador de Laplace-Beltrami, etiquetado por el entero n , y la degeneración del espacio propio correspondiente es g_n . En consecuencia, la implementación unitaria de la dinámica depende del comportamiento asintótico de los coeficientes de Bogoliubov para n grande. Gracias al análisis asintótico que hicimos en la sección anterior, sabemos, para cualquiera de los dos gauges considerados, que el coeficiente $\beta_n(\eta, \eta_0)$ es de orden n^{-2} , por lo que la secuencia $\{g_n |\beta_n(\eta, \eta_0)|^2\}$ es, efectivamente, sumable (recordemos que $g_n = n^2$). Esto garantiza que la representación que define la estructura compleja j_0 admite una implementación unitaria de la dinámica [además de ser invariante bajo el grupo de simetrías $SO(4)$].

Equivalencia entre representaciones invariantes $SO(4)$

Queremos investigar ahora si existen otras estructuras complejas con las mismas propiedades de invariancia y unitariedad de la dinámica que no sean equivalentes a la definida por j_0 . Vamos a ver que no. En otras palabras, nuestros criterios de unicidad (véanse los Capítulos 4 y 5) seleccionan, una vez más, una única familia de representaciones, todas relacionadas entre sí de manera unitaria. Para probar esto, debemos recordar que, según la discusión de la Sección 4.3.1, el espacio de configuración \mathcal{F} (y el de momentos \mathcal{P}) de nuestro sistema admite una descomposición en representaciones irreducibles \mathcal{F}^n (\mathcal{P}^n) del grupo $SO(4)$, proporcionadas por los modos pertenecientes a cada uno de los espacios propios del operador de Laplace-Beltrami. Así pues, el espacio de fases Γ se descompone de la forma $\Gamma^n = \mathcal{F}^n \oplus \mathcal{P}^n$. Una primera aplicación del lema de Schur nos permite afirmar que cualquier estructura compleja $J : \Gamma \rightarrow \Gamma$ que conmuta con todos los elementos de $SO(4)$ es diagonal por bloques, donde cada

bloque $J_n : \Gamma^n \rightarrow \Gamma^n$ es invariante bajo la representación irreducible correspondiente de $SO(4)$. Cada uno de ellos consta a su vez de cuatro aplicaciones, que conectan \mathcal{F}^n consigo mismo, \mathcal{F}^n con \mathcal{P}^n , \mathcal{P}^n con \mathcal{F}^n y \mathcal{P}^n consigo. De nuevo, si aplicamos el lema de Schur a cada una de estas componentes de J_n , vemos que la única posibilidad permitida es que sean proporcionales a la identidad. Concluimos de todo ello que cualquier estructura compleja J invariante bajo el grupo $SO(4)$ es diagonal por bloques, cada uno dado por una matriz real J_n de dimensión 2×2 que sólo depende de la etiqueta n , con la forma genérica

$$J_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}. \quad (6.4.3)$$

Realizamos a continuación un cambio de coordenadas en el espacio de fases, pasando de las variables de configuración y momento a las de creación y destrucción. Llamamos j a la estructura compleja considerada, expresada en las nuevas variables. De nuestra caracterización de las estructuras complejas invariantes bajo el grupo $SO(4)$, sabemos que j está relacionada con la estructura compleja asociada al caso sin masa, j_0 , por medio de una transformación canónica \mathcal{K} también diagonal por bloques \mathcal{K}_n , cada uno de ellos dado por una matriz 2×2 de la forma

$$\mathcal{K}_n = \begin{pmatrix} \kappa_n & \lambda_n \\ \lambda_n^* & \kappa_n^* \end{pmatrix}. \quad (6.4.4)$$

Por tratarse \mathcal{K}_n en sí misma de una transformación simpléctica, debe cumplirse que $|\kappa_n|^2 - |\lambda_n|^2 = 1$.

Nuestro siguiente paso es comprobar que todas las representaciones determinadas por estructuras complejas invariantes en las que la dinámica admite una implementación unitaria son unitariamente equivalentes a j_0 . Debemos recordar que la dinámica se implementa unitariamente en la representación asociada a una estructura simpléctica $j = \mathcal{K}j_0\mathcal{K}^{-1}$ si y solamente si la transformación $\mathcal{K}^{-1}\mathcal{U}\mathcal{K}$ admite una implementación unitaria respecto de la representación que define j_0 . La transformación $\mathcal{K}^{-1}\mathcal{U}\mathcal{K}$ se puede descomponer por bloques

$$\mathcal{K}_n^{-1}\mathcal{U}_n\mathcal{K}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^J(\eta, \eta_0) & \beta_n^J(\eta, \eta_0) \\ [\beta_n^J(\eta, \eta_0)]^* & [\alpha_n^J(\eta, \eta_0)]^* \end{pmatrix}, \quad (6.4.5)$$

donde [véanse las Ecs. (4.3.11) y (4.3.12)]

$$\beta_n^J(\eta, \eta_0) = (\kappa_n^*)^2 \beta_n(\eta, \eta_0) - \lambda_n^2 \beta_n^*(\eta, \eta_0) + 2i\kappa_n^* \lambda_n \Im[\alpha_n(\eta, \eta_0)]. \quad (6.4.6)$$

La condición de unitariedad equivale a la sumabilidad de la secuencia $\{g_n |\beta_n^J(\eta, \eta_0)|^2\}$ respecto de n , donde $g_n = n^2$ es el factor de degeneración. Vamos a ver que, si esta condición de sumabilidad se cumple, entonces la secuencia $\{\sqrt{g_n} \lambda_n\}$ debe ser de cuadrado

sumable. Pero esta sumabilidad es justo la condición que asegura que la representación determinada por la estructura compleja j es unitariamente equivalente a la de j_0 .

Consideremos pues una representación invariante con dinámica unitaria, de manera que la secuencia formada por $n\beta_n^J(\eta, \eta_0)$ es de cuadrado sumable en un intervalo I de tiempos alrededor del tiempo inicial η_0 , donde hemos reemplazado $\sqrt{g_n}$ por n . Entonces, la secuencia de elementos $n\beta_n^J(\eta, \eta_0)/(\kappa_n^*)^2$ lo será también, ya que $|\kappa_n|^2 \geq 1$. Si excluimos los términos proporcionales a $\beta_n(\eta, \eta_0)$ que sabemos que son de cuadrado sumable y sustituimos el término dominante de $\alpha_n(\eta, \eta_0)$, que se puede deducir a partir de la Ec. (6.3.7a) después de introducir (4.1.19), (4.1.15) y (6.3.8) (donde debemos recordar que esta última expresión depende de la elección de gauge), llegamos al resultado de que la secuencia

$$\left\{ n z_n \sin \left[\omega_n(\eta - \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{s(\bar{\eta})}{2\omega_n} d\bar{\eta} \right] \right\} \quad (6.4.7)$$

debe ser de cuadrado sumable, con $z_n = \lambda_n/\kappa_n^*$. La suma de los cuadrados de los elementos de esta secuencia proporciona pues una función del tiempo bien definida $\forall \eta \in I$. Empleando el teorema de Luzin como vimos en la Sección 4.3 podemos demostrar entonces que las sumas parciales de elementos $n|z_n|$ al cuadrado tienen una cota superior. En consecuencia, $\{n^2|z_n|^2\}$ es sumable. Con esto y la relación $|\kappa_n|^2 - |\lambda_n|^2 = 1$, deducimos que la secuencia de elementos $\{1/\kappa_n\}$ está acotada inferiormente, lo que a su vez nos permite concluir que la secuencia $\{n\lambda_n\}$ es de cuadrado sumable, como queríamos probar. En resumen, cualquier representación con un estado de vacío invariante bajo el grupo $SO(4)$ y que admite una implementación unitaria de la dinámica pertenece a una única clase de equivalencia de representaciones cuánticas, todas ellas unitariamente equivalentes entre sí. Las modificaciones que aparecen en la dinámica descrita por las Ecs. (6.2.14) y (6.2.17) con respecto a las ecuaciones de movimiento (4.1.6) (adecuadamente expandidas en modos) no alteran sustancialmente el límite asintótico de la dinámica, por lo que se salvaguarda la capacidad de los criterios de invariancia y evolución unitaria para garantizar la unicidad de la cuantización de Fock.

Unicidad respecto a re-escalados con funciones dependientes del tiempo

Hemos alcanzado una descripción cuántica satisfactoria para la perturbación del campo escalar en términos de los modos \bar{f}_n y los momentos canónicamente conjugados. La representación se caracteriza por su invariancia bajo el grupo $SO(4)$ y una dinámica unitaria. En realidad, el par canónico que hemos escogido se ha obtenido después de realizar un re-escalado del campo apropiado, con una función del espaciotiempo de fondo dependiente del tiempo. La cuestión que surge ahora es si eligiendo algún

otro re-escalado de nuestras variables fundamentales con una función dependiente del tiempo podemos llegar a una cuantización diferente, no equivalente, pero que presente las mismas propiedades de invariancia y unitariedad. Un re-escalado de las características mencionadas se puede completar en una transformación canónica re-escalando el momento por el inverso de la función variable en el tiempo introducida. Además, podemos permitir una contribución adicional lineal en el campo y proporcional a otra función dependiente del tiempo. Esta clase de transformaciones canónicas respetan la linealidad de sistema y las isometrías espaciales, pero al variar en el tiempo modifican la dinámica. En esta sección, veremos que nuestros criterios de unicidad restringen fuertemente la libertad existente inicialmente para llevar a cabo una transformación así. De hecho, permiten únicamente transformaciones constantes en el tiempo.

Modo a modo, la transformación canónica que vamos a analizar tiene la forma:

$$\check{f}_n(\eta) = F(\eta)\bar{f}_n(\eta), \quad (6.4.8a)$$

$$\check{\pi}_{\check{f}_n}(\eta) = \frac{1}{F(\eta)}\bar{\pi}_{\bar{f}_n}(\eta) + G(\eta)\bar{f}_n(\eta). \quad (6.4.8b)$$

Queremos llamar la atención sobre el hecho de que esta transformación lineal dependiente del tiempo afecta a todos los modos por igual, lo que nos asegura que se trata de una transformación canónica local. Además, asumimos (sin pérdida de generalidad) que las funciones F y G son reales, doblemente diferenciables y tales que F no se anula en su dominio de definición. Así evitamos alterar la formulación diferencial del modelo y no introducimos singularidades artificiales. En caso de que F y G sean constantes, las representaciones asociadas a las variables originales y a las nuevas son equivalentes. Esto nos permite elegir condiciones iniciales convenientes para dichas funciones. Concretamente, elegimos dichas condiciones de forma tal que, a tiempo inicial η_0 , el par canónico original y el transformado coincidan: $F(\eta_0) = 1$ y $G(\eta_0) = 0$.

Tomamos ahora las variables de creación y destrucción correspondiente al caso sin masa [véase la Ec. (6.3.5)] para los pares transformados y sin transformar definidos en las Ecs. (6.4.8). La evolución de los nuevos pares estará determinada por un conjunto de matrices $\check{\mathcal{U}}_n(\eta, \eta_0)$ cuyos coeficientes $\check{\alpha}_n(\eta, \eta_0)$ y $\check{\beta}_n(\eta, \eta_0)$ se relacionan con los de las matrices $\mathcal{U}_n(\eta, \eta_0)$ del par original mediante

$$\check{\alpha}_n(\eta, \eta_0) = F_+(\eta)\alpha_n(\eta, \eta_0) + F_-(\eta)\beta_n^*(\eta, \eta_0) + \frac{i}{2\omega_n}G(\eta)[\alpha_n(\eta, \eta_0) + \beta_n^*(\eta, \eta_0)], \quad (6.4.9a)$$

$$\check{\beta}_n(\eta, \eta_0) = F_+(\eta)\beta_n(\eta, \eta_0) + F_-(\eta)\alpha_n^*(\eta, \eta_0) + \frac{i}{2\omega_n}G(\eta)[\beta_n(\eta, \eta_0) + \alpha_n^*(\eta, \eta_0)], \quad (6.4.9b)$$

donde $2F_{\pm} = F \pm 1/F$. Es posible ver que la transformación dinámica $\check{\mathcal{U}}$ no admite una implementación unitaria respecto de la representación de Fock que proporciona j_0 . Pero, siguiendo los resultados de la Sección 4.4, es posible ver que ni siquiera existe una representación invariante $SO(4)$ que admita una implementación unitaria de la evolución, a menos que la función F sea la identidad y G se anule, esto es, que la transformación canónica considerada sea trivial. Vamos a ver esto en mayor detalle (la prueba completa se puede consultar en la sección que hemos mencionado).

Para probarlo, consideremos una estructura compleja invariante j , que se relaciona con j_0 a través de una transformación \mathcal{K} . La dinámica asociada a la nueva descripción de campo del sistema admite una implementación unitaria respecto a j si y sólo si $\mathcal{K}^{-1}\check{\mathcal{U}}\mathcal{K}$ lo hace respecto de j_0 . Esta última transformación es diagonal por bloques, ya que tanto $\check{\mathcal{U}}$ como \mathcal{K} lo son, y no es difícil comprobar que los coeficientes de su parte antilineal son

$$\check{\beta}_n^J(\eta, \eta_0) = (\kappa_n^*)^2 \check{\beta}_n(\eta, \eta_0) - \lambda_n^2 \check{\beta}_n^*(\eta, \eta_0) + 2i\kappa_n^* \lambda_n \Im[\check{\alpha}_n(\eta, \eta_0)]. \quad (6.4.10)$$

Así pues, si asumimos unitariedad de la dinámica, debemos tener que la secuencia $\{n\check{\beta}_n^J(\eta, \eta_0)\}$ sea de cuadrado sumable para todo valor de η en el intervalo I .

En particular, como $|\kappa_n| \geq 1$, la secuencia de elementos $\check{\beta}_n^J(\eta, \eta_0)/(\kappa_n^*)^2$ debe tener un límite nulo cuando $n \rightarrow \infty$. Introduciendo los límites asintóticos de $\alpha_n(\eta, \eta_0)$ y $\beta_n(\eta, \eta_0)$ en las expresiones (6.4.9), junto con $\omega_n = n + O(n^{-1})$, ha de cumplirse que la secuencia de elementos

$$\left[e^{in(\eta-\eta_0)} - z_n^2 e^{-in(\eta-\eta_0)} \right] F_-(\eta) - 2iz_n \sin[n(\eta-\eta_0)] F_+(\eta) \quad (6.4.11)$$

tienda a cero para n infinitamente grande. Centremos nuestra discusión en tiempos en el intervalo I de la forma $\eta = \eta_0 + 2\pi q/p$, con q y p dos enteros adecuados. Si elegimos además $n = kp > 1$ ($k \in \mathbb{N}^+$), conseguimos simplificar la expresión anterior, cuyas partes real e imaginaria

$$\left[1 - \Re(z_{kp}^2) \right] F_-\left(\eta_0 + \frac{2\pi q}{p}\right), \quad (6.4.12a)$$

$$- \Im(z_{kp}^2) F_-\left(\eta_0 + \frac{2\pi q}{p}\right), \quad (6.4.12b)$$

respectivamente, forman secuencias que deben tender a cero en el límite $k \rightarrow \infty$ (lo que equivale a $n \rightarrow \infty$) para cada q y p . Pero esto último es sólo posible si se cumple que $F_-(\eta_0 + 2\pi q/p) = 0$, ya que el resto de factores de dichas secuencias no pueden tender a cero simultáneamente en ninguna subsecuencia \mathbb{M}' de n (véase la Sección 4.4). Como el conjunto de puntos $\eta_0 + 2\pi q/p$ es denso en el intervalo I , y $F(\eta)$ es una función continua, con $F(\eta_0) = 1$, forzosamente debe ser $F(\eta) = 1$ en todo el intervalo temporal.

Identificando $F(\eta)$ con la función unidad en (6.4.11), queda claro que z_n ha de tender a cero para n suficientemente grande (según el Apéndice C, la función seno no puede hacerlo $\forall \eta \in I$). Del comportamiento asintótico de la secuencia $\{n\beta_n^J(\eta, \eta_0)/(\kappa_n^*)^2\}$ podemos deducir entonces que los términos

$$G(\eta) - 4nz_n \sin[n(\eta - \eta_0)] e^{-in(\eta - \eta_0)} \quad (6.4.13)$$

tienen también un límite nulo. Separemos esta secuencia en su parte real e imaginaria. De esta última podemos deducir que la secuencia $\{nz_n\}$ debe tender a cero (según el Apéndice C, la función $\sin[n(\eta - \eta_0)] \sin[n(\eta - \eta_0) + \delta_n]$ no puede hacerlo para todo η en I). Con ello, analizando la parte real de (6.4.13), deducimos que dicha secuencia alcanza un límite nulo para n suficientemente grande si y sólo si la función G es idénticamente nula. Esto último nos permite afirmar que la transformación (6.4.8) debe ser la identidad si queremos que $\check{\mathcal{U}}$ admita una implementación unitaria en una representación de Fock con un vacío invariante bajo el grupo $SO(4)$.

En resumen, hemos visto que cualquier otro re-escalado dependiente del tiempo diferente del de Mukhanov, aplicado a la perturbación material, no permite implementar la dinámica unitariamente. Esto ocurre, por ejemplo, en la descripción de campo adoptada en la Ref. [42].

6.4.1. Una cuantización equivalente

Cuando introdujimos el re-escalado de Mukhanov de la perturbación material por medio de la transformación canónica dada en las Ecs. (6.2.10) y (6.2.24) para cada fijación de gauge, pusimos especial cuidado en redefinir su momento canónicamente conjugado introduciendo ciertas contribuciones proporcionales a la propia perturbación. Esto nos permite asegurar que el término cruzado que aparece en el hamiltoniano, y que está determinado por (6.2.11) o (6.2.25), dependiendo de la fijación de gauge, decrece suficientemente rápido cuando $n \rightarrow \infty$. Por supuesto, vamos a ver que es posible realizar una transformación canónica que elimina por completo dicha contribución, pero será a costa de cambiar cada modo de forma diferente, por lo que la transformación no será local. Para mantener la linealidad del sistema, sólo consideraremos transformaciones del tipo (6.4.8), pero permitiendo que las funciones involucradas dependan ahora de los modos. En particular, elegiremos, como contrapartida de la función F ,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{E_{\pi\pi}^n}}. \quad (6.4.14)$$

La transformación correspondiente, válida para ambas fijaciones de gauge, permite pasar a unas nuevas variables en las que la ecuación de movimiento (6.2.17) no tiene

contribución de la primera derivada temporal, es decir $r_n = 0$, mientras que s_n sigue estando dada por la Ec. (6.2.18b), salvo correcciones del orden de n^{-2} . Esta transformación se puede completar, tomando la siguiente contrapartida de la función G :

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{\bar{E}_{\pi\pi}^n}} \left(\bar{E}_{f\pi}^n - \frac{1}{2} \frac{\dot{\bar{E}}_{\pi\pi}^n}{\bar{E}_{\pi\pi}^n} \right). \quad (6.4.15)$$

Con ello, los nuevos momentos conjugados a la nueva perturbación satisfacen la ecuación $\check{\pi}_{\check{f}_n} = \check{f}_n$. De este modo, se consigue eliminar del nuevo hamiltoniano acoplos cruzados de perturbación material y su momento canónicamente conjugado.

En esta situación, los resultados de unicidad para el caso de un campo escalar con una masa dependiente del tiempo en la tres-esfera (véanse las Secciones 4.3 y 4.4) se pueden aplicar de una manera inmediata. De acuerdo con ellos, sólo existe una clase de equivalencia unitaria de cuantizaciones de Fock para las relaciones canónicas de conmutación que poseen las propiedades deseadas de invariancia bajo las isometrías y unitariedad de la dinámica. Partiendo de los operadores asociados a las variables de configuración y sus momentos, podemos construir las correspondientes variables de creación y destrucción. Las nuevas variables estarán relacionadas con las antiguas por medio de una transformación simpléctica \mathcal{K} diagonal por bloques \mathcal{K}_n . Los coeficientes que determinan la parte antilineal de esta transformación, y que permiten distinguir si es unitariamente implementable o no, tienen la forma

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left(F_n - \frac{1}{F_n} \right) + \frac{i}{2\omega_n} G_n. \quad (6.4.16)$$

Si recordamos que $\bar{E}_{\pi\pi}^n = 1 + O(n^{-2})$ y que $\bar{E}_{f\pi}^n$ decrece asintóticamente como n^{-2} , de acuerdo con las Ecs. (6.2.11) y (6.2.25), es fácil darse cuenta de que la secuencia $\{n\lambda_n\}$ es de cuadrado sumable, para ambas fijaciones de gauge. Por tanto, \mathcal{K} admite una implementación unitaria respecto de la representación asociada a j_0 y, como consecuencia, la nueva cuantización es unitariamente equivalente a la discutida en las secciones previas.

6.5. Potenciales de Bardeen

A la hora de estudiar perturbaciones cosmológicas, se suelen emplear cantidades conocidas como invariantes de gauge para describir la física de forma consistente, independiente de la identificación del espaciotiempo y su contenido material al permitir difeomorfismos. En esta sección vamos a construir un par de variables invariantes de gauge a partir de los potenciales de Bardeen [40], discutiremos su relación con el par

de variables conjugadas que hemos venido utilizando en este capítulo y compararemos la cuantización de Fock basada en dichos invariantes con la construida en las secciones anteriores.

Consideremos una transformación de gauge del tipo $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon \xi^\mu$, donde $\epsilon \xi^\mu$ representa un desplazamiento pequeño del mismo orden que las perturbaciones que estamos estudiando (por lo que ϵ es el mismo parámetro perturbativo que en la Sección 6.1.2). El vector covariante correspondiente a ξ^μ se puede descomponer en armónicos esféricos como

$$\xi_0 = \sqrt{2} \pi \sigma^2 \bar{N}_0 \sum_n T_n \tilde{Q}^n, \quad \xi_i = \sqrt{2} \pi \sigma^2 e^\alpha \sum_n L_n (\tilde{P}_i)^n, \quad (6.5.1)$$

donde T_n y L_n son funciones que sólo dependen del tiempo. No hemos incluido contribuciones armónicas genuinamente vectoriales, que están desacopladas dinámicamente y sólo afectan a las contribuciones vectoriales correspondientes de la métrica [40].

Entendemos que esta transformación no afecta al espaciotiempo de fondo, pero sí induce un cambio en las distintas contribuciones perturbativas (6.1.6). Si sólo tenemos en cuenta contribuciones hasta el orden de ϵ , entonces

$$a_n \mapsto a_n + e^{-\alpha} \left(\dot{\alpha} T_n + \frac{1}{3} L_n \right), \quad (6.5.2a)$$

$$b_n \mapsto b_n - \frac{1}{3} e^{-\alpha} L_n, \quad (6.5.2b)$$

$$f_n \mapsto f_n + e^{-\alpha} \dot{\varphi} T_n, \quad (6.5.2c)$$

$$g_n \mapsto g_n + e^{-\alpha} \dot{T}_n, \quad (6.5.2d)$$

$$k_n \mapsto k_n - \bar{N}_0 e^{-\alpha} (\omega_n^2 T_n + \dot{L}_n - \dot{\alpha} L_n). \quad (6.5.2e)$$

Recordemos que el punto indica derivada respecto al tiempo conforme. Es sencillo combinar las cantidades anteriores para construir invariantes de gauge hasta el orden perturbativo mencionado. Dos ejemplos independientes son

$$\mathcal{E}_n^m = \frac{e^{-2\alpha}}{E_0} \left[-\dot{\varphi}^2 g_n + \dot{\varphi} \dot{f}_n + (3\dot{\alpha} \dot{\varphi} + e^{2\alpha} m^2 \varphi) f_n \right], \quad (6.5.3a)$$

$$v_n^s = \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{\omega_n^2}{\dot{\varphi}} f_n + \left(\frac{k_n}{\bar{N}_0} - 3\dot{b}_n \right) \right], \quad (6.5.3b)$$

donde hemos introducido una función proporcional a la densidad de energía del campo escalar de fondo

$$E_0 = \frac{1}{2} (e^{-2\alpha} \dot{\varphi}^2 + m^2 \varphi^2). \quad (6.5.4)$$

Las dos cantidades que hemos definido se corresponden con dos de los escalares invariantes de gauge introducidos por Bardeen: la densidad de energía y la velocidad de

las perturbaciones materiales [40]. Obviamente, cualquier combinación de estas cantidades invariantes y las variables de fondo proporciona también un invariante de gauge. En particular, vamos a definir el par de perturbaciones invariantes

$$\Psi_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}} \frac{e^{5\alpha}}{\pi_\varphi} E_0 \mathcal{E}_{\mathbf{n}}^m, \quad (6.5.5a)$$

$$\Pi_{\Psi_{\mathbf{n}}} = -\sqrt{\frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}} e^{-\alpha} \pi_\varphi v_{\mathbf{n}}^s - \frac{e^{-2\alpha}}{\pi_\varphi} (2\pi_\alpha \pi_\varphi - e^{6\alpha} m^2 \varphi) \Psi_{\mathbf{n}}. \quad (6.5.5b)$$

Es posible ver que estas dos variables satisfacen la relación $\dot{\Psi}_{\mathbf{n}} = \Pi_{\Psi_{\mathbf{n}}} + O(\epsilon)$, que se deduce de

$$\frac{d}{d\eta} (e^{3\alpha} E_0 \mathcal{E}_{\mathbf{n}}^m) \approx -\frac{n^2 - 4}{\sqrt{n^2 - 1}} e^{-3\alpha} \pi_\varphi^2 v_{\mathbf{n}}^s + O(\epsilon), \quad (6.5.6)$$

y que se satisface para cualquier contenido material isótropo [40], como resulta ser nuestro caso. Además de esta relación, para este tipo de fluidos también tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} e^{-4\alpha} \pi_\varphi^2 \frac{d}{d\eta} (e^\alpha v_{\mathbf{n}}^s) = \left(1 - 3 \frac{e^{-4\alpha} \pi_\varphi^2}{n^2 - 4}\right) e^{3\alpha} E_0 \mathcal{E}_{\mathbf{n}}^m + O(\epsilon). \quad (6.5.7)$$

De aquí podemos deducir la correspondiente relación entre $\dot{\Pi}_{\Psi_{\mathbf{n}}}$ y $\Psi_{\mathbf{n}}$, que resulta ser

$$\dot{\Pi}_{\Psi_{\mathbf{n}}} = -\left(n^2 - 4 - 3e^{-4\bar{\alpha}} \pi_\varphi^2 - \dot{\chi} - \chi^2\right) \Psi_{\mathbf{n}} + O(\epsilon), \quad (6.5.8)$$

donde hemos definido

$$\chi = -\frac{e^{-2\bar{\alpha}}}{\pi_\varphi} (2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} \pi_\varphi - e^{6\bar{\alpha}} m^2 \tilde{\varphi}). \quad (6.5.9)$$

Combinando $\dot{\Psi}_{\mathbf{n}} = \Pi_{\Psi_{\mathbf{n}}}$ con la Ec. (6.5.8), es posible ver que $\Psi_{\mathbf{n}}$ satisface una ecuación similar a la de los modos de un campo escalar sujeto a un potencial cuadrático dependiente del tiempo,

$$\ddot{\Psi}_{\mathbf{n}} + \left(n^2 - 4 - 3e^{-4\bar{\alpha}} \pi_\varphi^2 - \dot{\chi} - \chi^2\right) \Psi_{\mathbf{n}} = O(\epsilon). \quad (6.5.10)$$

Así que podemos construir una cuantización de Fock con un vacío invariante bajo el grupo de simetrías $SO(4)$ y que admite una implementación unitaria de la dinámica. Como sabemos, basta con adoptar la representación basada en la elección de variables de creación y destrucción natural para el campo escalar sin masa (véase la Sección 4.2):

$$\begin{pmatrix} a_{\Psi_{\mathbf{n}}} \\ a_{\Psi_{\mathbf{n}}}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{n}}}} \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{n}} & i \\ \omega_{\mathbf{n}} & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\mathbf{n}} \\ \Pi_{\Psi_{\mathbf{n}}} \end{pmatrix}, \quad (6.5.11)$$

con $\omega_{\mathbf{n}}^2 = n^2 - 1$.² Según vimos en la Sección 4.3, esta representación debe ser unitariamente equivalente a cualquier otra cuantización que comparta las mismas propiedades

²Alternativamente, podríamos haber reemplazado $\omega_{\mathbf{n}}$ por $\sqrt{n^2 - 4}$, obteniendo una representación equivalente.

de invariancia y unitariedad. Ahora vamos a ver que esta representación y la que proporcionan las variables \bar{f}_n y $\bar{\pi}_{\bar{f}_n}$, para cada gauge, son unitariamente equivalentes, puesto que la transformación simpléctica que las relaciona en ambos casos admite una implementación unitaria.

Gauge longitudinal

En el gauge longitudinal, haciendo uso de las variables (6.2.6) y de la transformación (6.2.10), los invariantes de Bardeen (6.5.3) se pueden escribir como

$$\mathcal{E}_n^m = \frac{e^{-5\bar{\alpha}}}{E_0} [\pi_\varphi \bar{\pi}_{\bar{f}_n} - e^{-2\bar{\alpha}} (2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} \pi_\varphi - e^{6\bar{\alpha}} m^2 \tilde{\varphi}) \bar{f}_n] + O(\epsilon^2), \quad (6.5.12a)$$

$$v_n^s = \sqrt{n^2 - 1} \frac{e^{\bar{\alpha}}}{\pi_\varphi} \bar{f}_n + O(\epsilon^2). \quad (6.5.12b)$$

Utilizando estas relaciones y las Ecs. (6.5.5) llegamos a

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}} (\bar{\pi}_{\bar{f}_n} + \chi \bar{f}_n) + O(\epsilon^2), \quad (6.5.13a)$$

$$\Pi_{\Psi_n} = \frac{\chi}{\sqrt{n^2 - 4}} (\bar{\pi}_{\bar{f}_n} + \chi \bar{f}_n) - \sqrt{n^2 - 4} \bar{f}_n + O(\epsilon^2), \quad (6.5.13b)$$

donde χ está definida en la Ec. (6.5.9). Utilizando estas relaciones, es posible ver que Ψ_n y Π_{Ψ_n} son realmente variables canónicamente conjugadas en el espacio de fases del sistema reducido (incluyendo los grados de libertad homogéneos).

Ahora bien, la transformación canónica que relaciona $(\bar{f}_n, \bar{\pi}_{\bar{f}_n})$ con (Ψ_n, Π_{Ψ_n}) es más general que la considerada en la Sección 6.4.1, ya que las nuevas coordenadas contienen contribuciones del momento original. Sin embargo, la transformación es lineal y preserva las etiquetas n , ℓ , y m , por lo que el simplectomorfismo \mathcal{K} que conecta las dos bases de variables de creación y destrucción es diagonal por bloques, con cada bloque \mathcal{K}_n del tipo (6.4.4). La parte antilineal de esta transformación está caracterizada por los coeficientes

$$\lambda_n = \frac{i}{2} \frac{\chi^2 + 3}{\sqrt{n^2 - 1} \sqrt{n^2 - 4}}. \quad (6.5.14)$$

Por tanto, la transformación se puede implementar a través de un operador unitario en la teoría cuántica, ya que la secuencia de elementos $n\lambda_n$ (donde hemos sustituido la degeneración de los espacios propios del operador de Laplace-Beltrami $g_n = n^2$) es ciertamente de cuadrado sumable para todo tiempo η , siempre que π_φ no se anule, lo que asegura que χ esté bien definida. En resumen, hemos visto que la perturbación se puede describir cuánticamente en términos de las variables invariantes de gauge (Ψ_n, Π_{Ψ_n}) , y que dicha descripción es físicamente equivalente a la descripción cuántica de partida, unívocamente seleccionada al aplicar los criterios de invariancia bajo las simetrías y unitariedad de la dinámica.

Fijación de gauge alternatia

Para el otro gauge estudiado, en el que la métrica espacial es homogénea e isotrópica, las variables que resultan de la transformación (6.2.24) permiten reescribir los potenciales de Bardeen (6.5.3) de la forma

$$\mathcal{E}_n^m = \frac{e^{-5\bar{\alpha}}}{E_0} \left[\pi_\varphi \bar{\pi}_{\bar{f}_n} - e^{-2\bar{\alpha}} \left(2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} \pi_\varphi - e^{6\bar{\alpha}} m^2 \bar{\varphi} - 3 \frac{\pi_\varphi^3}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} \right) \bar{f}_n \right] + O(\epsilon^2), \quad (6.5.15a)$$

$$v_n^s = -3 \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2 - 4} \frac{e^{-\bar{\alpha}}}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} \left[\pi_\varphi \bar{\pi}_{\bar{f}_n} - e^{-2\bar{\alpha}} \left(2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} \pi_\varphi - e^{6\bar{\alpha}} m^2 \bar{\varphi} - 3 \frac{\pi_\varphi^3}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} \right) \bar{f}_n \right] + \sqrt{n^2 - 1} \frac{e^{\bar{\alpha}}}{\pi_\varphi} \bar{f}_n + O(\epsilon^2). \quad (6.5.15b)$$

De nuevo, utilizando estas relaciones y las Ecs. (6.5.5), llegamos a una expresión equivalente a (6.5.13), pero sustituyendo la función χ en (6.5.9) por

$$\bar{\chi} = \frac{e^{-2\bar{\alpha}}}{\pi_\varphi} \left(3 \frac{\pi_\varphi^3}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} - 2\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} \pi_\varphi + e^{6\bar{\alpha}} m^2 \bar{\varphi} \right). \quad (6.5.16)$$

Al igual que antes, las variables Ψ_n y Π_{Ψ_n} son canónicamente conjugadas en el espacio de fases del sistema reducido. La transformación \mathcal{K} que relaciona las variables de creación y destrucción de $(\bar{f}_n, \bar{\pi}_{\bar{f}_n})$ con (Ψ_n, Π_{Ψ_n}) es de nuevo diagonal por bloques, con una parte antilineal caracterizada por coeficientes del tipo (6.5.14), pero de nuevo sustituyendo la función χ por $\bar{\chi}$. Por tanto, siempre que π_φ y $\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}$ no se anulen, la implementabilidad unitaria de la transformación \mathcal{K} está garantizada para todo tiempo η en I .

En conclusión, hemos visto que la cuantización que proporcionan Ψ_n y Π_{Ψ_n} es también unitariamente equivalente a la de \bar{f}_n y $\bar{\pi}_{\bar{f}_n}$ para la fijación de gauge alternativa, dotando de robustez a nuestros resultados.

6.6. Discusión y conclusiones

El análisis que hemos presentado en este capítulo es claramente un ejemplo en el que los criterios de unicidad estudiados en los Capítulos 4 y 5 pueden aplicarse satisfactoriamente. En este caso, hemos visto que incluso para un campo escalar con ciertas correcciones adicionales en su ecuación de movimiento, que presentan no obstante un comportamiento asintótico adecuado, se puede llegar a una descripción cuántica única. En particular, hemos estudiado la cuantización de las perturbaciones de un campo escalar con masa acoplado al campo gravitacional en un modelo de FLRW. Hemos considerado un escenario con secciones espaciales compactas con la topología de una

tres-esfera, lo que asegura la ausencia de divergencias infrarrojas. Debido a la existencia de ciertas ligaduras, hemos eliminado algunos grados de libertad locales a través de dos fijaciones de gauge diferentes: un gauge longitudinal, en el que el vector desplazamiento es idénticamente nulo y en el que la métrica espacial es conforme a la de la tres-esfera, y otro gauge en el que esta tres-métrica es homogénea e isotrópica (igual que en FLRW). Después de estas fijaciones de gauge, los grados de libertad dinámicos resultantes se identifican con los de la perturbación del campo material.

Los resultados de unicidad de los Capítulos 4 y 5 (véanse las Refs. [113–115, 139]) pueden ser aplicados y extendidos a los sistemas reducidos obtenidos con cada una de estas fijaciones de gauge. Las modificaciones en las ecuaciones de campo asociadas con términos disipativos y las correcciones en el potencial dependiente del tiempo, así como las contribuciones presentes en la relación del momento con la derivada temporal del campo, son en todos los casos del orden de n^{-2} o menores. Estas contribuciones preservan el buen comportamiento ultravioleta de la dinámica del sistema, introduciendo correcciones también $O(n^{-2})$, precisamente el orden que se desprecia en nuestras demostraciones sobre la unicidad en la cuantización de Fock del sistema, tanto para la elección de representación como para la selección de un par canónico.

En dicha cuantización, los grados de libertad homogéneos han sido tratados clásicamente, despreciando efectos cuánticos que puedan surgir de sus fluctuaciones. Uno esperaría que esta aproximación estuviera justificada lejos del régimen de Planck. Gracias al tratamiento perturbativo empleado, las inhomogeneidades están representadas por campos escalares lineales que admiten una cuantización de Fock estándar. Hemos restringido nuestro estudio a estructuras complejas que comparten la simetría $SO(4)$ del espaciotiempo de fondo (lo que conduce a una descripción cuántica con un estado de vacío invariante bajo esas simetrías) y con una implementación unitaria de la dinámica. Estas dos propiedades son suficientes para seleccionar una clase de equivalencia unitaria de representaciones para una elección de las variables de campo adecuada. Un representante de esta clase es la cuantización construida a partir de la estructura compleja que uno adoptaría de forma natural en el caso de un campo escalar sin masa en la tres-esfera.

Más aún, si uno explora otro tipo de descripciones de campo con pares canónicos alternativos, contruidos a partir de los primeros bajo un re-escalado del campo puramente dependiente del tiempo y completado en una transformación canónica, no es posible encontrar una representación de Fock que satisfaga ambos requerimientos simultáneamente. La elección correcta de las variables de campo se ha implementado en la Sección 6.2 como una transformación canónica en el espacio de fases completo del sistema, incluyendo los grados de libertad homogéneos. Posteriormente, hemos con-

siderado transformaciones canónicas lineales más generales que modifican cada modo independientemente, lo que permite una reformulación tal que la ecuación de campo resultante es justamente la de un campo escalar sujeto a un potencial cuadrático dependiente del tiempo en la tres-esfera, sin correcciones subdominantes de por medio, para la que los criterios de unicidad del Capítulo 4 son aplicables directamente. De este modo hemos alcanzado dos descripciones cuánticas de tipo Fock nuevas para las perturbaciones. Una de estas formulaciones está construida a partir de cantidades invariantes de gauge: las perturbaciones materiales asociadas a la densidad de energía y la velocidad introducidas por Bardeen [40]. En particular, nuestro análisis nos ha conducido a una descripción en la que ambos forman un par canónicamente conjugado. También conviene mencionar que las variables que hemos introducido difieren de las utilizadas en otros trabajos que han aparecido en la literatura [140, 141]. Además, hemos probado que las dos nuevas descripciones cuánticas son unitariamente equivalentes a la utilizada inicialmente para describir las perturbaciones del campo material tras una fijación de gauge.

Es importante resaltar que nuestro punto de partida son las perturbaciones del campo material, y que sólo para este campo es natural considerar re-escalados dependientes del tiempo que absorben parte de la variación temporal del fondo, a la vez que respetan la localidad y la linealidad del sistema. Las transformaciones canónicas definidas modo a modo, en general, no son locales. De esta forma, empezando con el campo escalar masivo, podemos seleccionar un único re-escalado y escoger un par canónico privilegiado imponiendo nuestros criterios de invariancia y dinámica unitaria. Para las reglas de conmutación canónicas correspondientes, los mismos criterios proporcionan una única representación de Fock preferida. Y, a partir de esta cuantización única, una transformación unitaria nos ha conducido a una cuantización alternativa, adaptada a un par de invariantes de gauge dados por potenciales de Bardeen. La consistencia en la aplicación de nuestros criterios para seleccionar la teoría cuántica resulta total, porque hemos mostrado además que la cuantización de Fock determinada de esta manera es precisamente la única que implementa la evolución de esos invariantes de gauge de forma unitaria, a la vez que respeta la simetría $SO(4)$. También destacamos que lo que nos permite escoger exactamente este par canónico de potenciales de Bardeen y no otro cualquiera es que hayamos empezado nuestra línea argumental a partir de la cuantización del campo escalar masivo.

La robustez que estos resultados arrojan a la hora de cuantizar perturbaciones cosmológicas es notable. Nos sirven de motivación para la descripción cuántica que vamos a realizar en el próximo capítulo. Allí vamos a presentar una cuantización de un universo inflacionario con inhomogeneidades en el contexto de la cosmología cuántica de lazos, combinando una cuantización polimérica de los grados de libertad homogéneos

(véanse los Capítulos 1, 2 y 3) con la descripción de tipo Fock de sus perturbaciones que hemos construido en el presente capítulo. A este formalismo se lo conoce como *cuantización híbrida*. Con este procedimiento, vamos a proporcionar una descripción cuántica completa del modelo dentro del programa de cuantización de Dirac [5].

Capítulo 7

Cuantización de un universo inflacionario en cosmología cuántica de lazos

Hemos visto que se puede alcanzar una cuantización de las inhomogeneidades sobre un fondo clásico de tipo FLRW en la que tanto la elección de variables canónicas para los modos del modelo como la representación cuántica de las relaciones canónicas de conmutación asociadas están determinadas de forma única. Una descripción de estas características es aproximadamente válida siempre que se puedan ignorar los efectos cuánticos sobre el espaciotiempo de fondo. En caso contrario, uno debe enfrentarse a dos problemas: i) proporcionar una descripción del espaciotiempo de fondo más fundamental de la que se pueda deducir de una teoría semiclásica, y ii) tener en cuenta la interacción de las inhomogeneidades (cuánticas) con el espaciotiempo de fondo fuera del régimen semiclásico. Una respuesta a la primera cuestión se puede proporcionar recurriendo a la cosmología cuántica de lazos. Sabemos que para el caso de un campo escalar sin masa existen resultados satisfactorios [25, 26, 44], o incluso para otros contenidos materiales [49–51], por lo que parece razonable aplicar una cuantización de estas características también a un espaciotiempo de FLRW acoplado a un campo escalar con masa. El caso de las inhomogeneidades es algo más sutil, dado que carecemos de una descripción cuántica polimérica desarrollada plenamente. Además, esperamos que exista un régimen en el que los efectos de geometría cuántica debidos genuinamente a la gravedad de lazos no sean demasiado importantes en las inhomogeneidades, y que la descripción de Fock sea suficientemente correcta para analizar su posible comportamiento cuántico, por lo que parece una buena aproximación partir de dicha descripción. Para abordarla, contamos con los resultados de unicidad que explicamos en los Caps. 4 y 5, y que fueron adaptados a este modelo en concreto en el Capítulo 6, que

dotan de gran robustez al procedimiento de cuantización. Para poder combinar adecuadamente la cuantización de lazos de los grados de libertad homogéneos con la de Fock para las inhomogeneidades, haremos un tratamiento del sistema como un campo cuántico que se propaga en un espaciotiempo también cuántico [142], y que fue aplicado en el presente contexto por primera vez a una cosmología de Gowdy en el tres-toro [89]. Esta propuesta inicial derivó en una cuantización completa de ese tipo de escenarios, que básicamente se reducen a un campo escalar en un espaciotiempo de Bianchi I, tanto en vacío [143, 144] como con un contenido material consistente en otro campo escalar, sin masa y mínimamente acoplado [145] (en este último caso, las inhomogeneidades, tanto geométricas como materiales, resultan estar codificadas en dos campos escalares formalmente idénticos). Nosotros vamos a aplicar un procedimiento similar, adaptado a una cosmología inflacionaria inhomogénea como la que proporciona un campo escalar con masa en un espaciotiempo de FLRW cerrado y con pequeñas inhomogeneidades que se propagan en él. En primer lugar, en la Sección 7.1 proponemos una prescripción para la cuantización del sistema puramente homogéneo dentro de la cosmología cuántica de lazos adaptando la presentada en el Capítulo 2 a un universo de FLRW con curvatura positiva. En la Sección 7.1.1 empezaremos con la descripción clásica del modelo. Estableceremos una cuantización del mismo en la Sección 7.1.2, en la que la singularidad clásica se elimina y las soluciones a la ligadura hamiltoniana pueden caracterizarse completamente, con lo que es posible construir el espacio de Hilbert físico del sistema a partir de ellas. Después, introduciremos inhomogeneidades siguiendo los argumentos estudiados en el Capítulo 6, es decir, haremos uso de la teoría de perturbaciones cosmológicas, y centraremos la discusión en inhomogeneidades de naturaleza escalar. Aplicaremos dos fijaciones de gauge diferentes, junto con una transformación canónica en la que la perturbación es re-escalada por el factor de escala que caracteriza al modelo homogéneo, recuperando dos descripciones del modelo similares. El sistema reducido consiste en un espaciotiempo de FLRW acoplado a un campo escalar masivo con inhomogeneidades descritas por una teoría de campos. Debemos recordar que, en el estudio presentado en el Capítulo 6, hicimos uso de unas variables homogéneas auxiliares asociadas al factor de escala y al campo escalar (y sus variables conjugadas), que deben ser convenientemente identificadas con las variables empleadas en la Sección 7.1 (véase la Sección 7.2.1 para más detalles). En la Sección 7.2.2, propondremos una prescripción para la cuantización del sistema combinando una cuantización polimérica no estándar para los grados de libertad geométricos de las soluciones homogéneas con una cuantización convencional para el resto de grados de libertad. Las propiedades de la ligadura hamiltoniana resultante, para cada fijación de gauge, serán estudiadas en la Sección 7.2.3. Finalmente, en la Sección 7.2.4 caracterizaremos las soluciones a la ligadura y construiremos el espacio de Hilbert físico a partir de ellas. Las conclusiones

obtenidas, junto con una discusión general, se pueden encontrar en la Sección 7.3.

7.1. Modelo homogéneo en cosmología cuántica de los

Vamos a considerar primero un campo escalar con masa mínimamente acoplado y homogéneo que se propaga en un espaciotiempo de FLRW con secciones espaciales cuya topología es la de una tres-esfera. Empezaremos con una descripción clásica, a partir de la cual construiremos el modelo cuántico, en el que especificaremos las soluciones al operador ligadura. Con ellas (y un producto escalar adecuado) obtendremos el espacio de Hilbert físico. En cuanto a los aspectos técnicos relacionados con la cuantización de la geometría, seguiremos principalmente el procedimiento propuesto en la Ref. [45].

7.1.1. Descripción clásica

El escenario homogéneo e isótropo consiste en un campo escalar con masa en un espaciotiempo de FLRW cerrado. Éste admite una foliación en secciones espaciales, isomorfas a tres-esferas. Sobre ellas, tomamos como estructuras fiduciales (una tríada ${}^0e_i^a$ para) la métrica estándar de radio unidad, $\bar{\Omega}_{ab}$, y una celda de volumen fiducial $l_0^3 = 2\pi^2$. Los grados de libertad –sin tener en cuenta las ligaduras– corresponden, en la parte material, al campo escalar con masa ϕ y su momento p_ϕ canónicamente conjugado, mientras que la parte geométrica está descrita por la conexión de Ashtekar-Barbero $A_a^i = cl_0^{-1} {}^0e_a^i$ y la tríada densitizada $E_i^a = pl_0^{-2} \sqrt{\bar{\Omega}} {}^0e_i^a$, donde i es el índice interno y a el espacial, y ambos toman los valores 1, 2 y 3. La estructura simpléctica (1.1.8) nos proporciona los corchetes de Poisson $\{c, p\} = 8\pi G\gamma/3$, donde G y γ son la constante de Newton y el parámetro de Immirzi, respectivamente (véase la Sección (1.1.2) para detalles adicionales).

Debido a la homogeneidad y a la isotropía, y a la elección de variables que hemos realizado, la única ligadura que no se anula idénticamente es la ligadura escalar $\mathbb{H}(N) = N_0 C_0 / (16\pi G)$, donde

$$C_0 = -\frac{6\sqrt{p}}{\gamma^2} [(c - l_0)^2 + \gamma^2 l_0^2] + \frac{8\pi G}{|p|^{3/2}} (p_\phi^2 + |p|^3 \tilde{m}^2 \phi^2). \quad (7.1.1)$$

7.1.2. Cuantización polimérica

La cuantización que vamos a aplicar al sistema homogéneo es esencialmente la misma que ya explicamos en los Capítulos 1 y 2. Resumidamente, vamos a adoptar una

representación de Schrödinger estándar para el campo escalar 1.2.1, cuyo espacio de Hilbert cinemático es $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}} = L^2(\mathbb{R}, d\phi)$, mientras que para la geometría emplearemos una cuantización polimérica 1.2.2. Es decir, las variables básicas serán flujos de tríadas densitizadas a través de superficies cuadradas –encerradas por cuatro aristas geodésicas– que básicamente se reducen a p , y holonomías de la conexión a lo largo de curvas integrales de las tríadas fiduciales, de longitud fiducial μl_0 . La parte gravitacional del espacio de Hilbert cinemático es $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} = L^2(\mathbb{R}_{\text{Bohr}}, d\mu_{\text{Bohr}})$ donde \mathbb{R}_{Bohr} es la compactificación de Bohr de la recta real, y $d\mu_{\text{Bohr}}$ es la medida de Haar natural asociada. El espacio de Hilbert cinemático será el producto tensorial $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$.

El siguiente paso en el programa de cuantización es identificar la parte gravitacional de la ligadura con un operador cuántico definido en el espacio de Hilbert cinemático. Para ello, seguiremos esencialmente el procedimiento de la Ref. [45]. Esta contribución debe ser escrita primero en términos de flujos de las tríadas densitizadas y holonomías de la conexión A_a^i . Esto permite regularizar el operador curvatura asociado a las conexiones $su(2)$. Una prescripción apropiada consiste en tomar un circuito cuadrado de holonomías construido a partir de cuatro curvas integrales a lo largo de campos vectoriales invariantes por la izquierda y por la derecha alternados –estos dos tipos de campos vectoriales conmutan– y que estén bien adaptados a las estructuras fiduciales. Después de esto, el operador curvatura es reemplazado, esencialmente, por un cuadrado de holonomías que encierra un área no nula Δ , cuyo valor está determinado por el espectro infrarrojo del operador área en gravedad cuántica de lazos [24, 55] –en el límite $\Delta \rightarrow 0$ recuperaríamos el operador curvatura local–. Al igual que en la Ref. [45], vamos a adoptar el esquema de dinámica mejorada: $\bar{\mu} = \sqrt{\Delta/p}$. Ya explicamos en el Capítulo 1 que esta elección tiene un límite semiclásico aceptable desde un punto de vista físico. Recordemos también que, en la representación triádica, una base de estados normalizables en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ está dada por $|v\rangle$ (con $v \in \mathbb{R}$), y donde la acción de los elementos de matriz de las holonomías es $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}|v\rangle = |v+1\rangle$, y la de los flujos es $\hat{p}|v\rangle = \text{sign}(v)(2\pi\gamma G\hbar\sqrt{\Delta}|v|)^{2/3}|v\rangle$.

Aunque hemos adoptado los principales aspectos de la prescripción presentada en la Ref. [45] para la cuantización de un espaciotiempo de FLRW cerrado, la prescripción final que vamos a considerar en esta tesis para la ligadura hamiltoniana cuántica seguirá las pautas de la presentada en el Capítulo 2. En concreto, nuestra propuesta es

$$\hat{C}_0 = \left[\widehat{\frac{1}{V}} \right]^{1/2} \left[8\pi G(\hat{p}_\phi^2 + \tilde{m}^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2) - \frac{6}{\gamma^2} \left\{ \hat{\Omega}^2 + (1 + \gamma^2) l_0^2 \hat{V}^{4/3} - \frac{\hat{V}^2}{\Delta} \sin^2(\hat{\mu} l_0) \right\} \right] \left[\widehat{\frac{1}{V}} \right]^{1/2}. \quad (7.1.2)$$

Recordemos que $\widehat{[1/V]}$ es el operador inverso del volumen definido a través de las

Ecs. (1.2.12) y (1.2.14), y donde

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega} = & \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \widehat{V}^{1/2} \left[\widehat{\text{sgn}(v)} \left(e^{-i\frac{\hat{\mu}l_0}{2}} \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} e^{-i\frac{\hat{\mu}l_0}{2}} - e^{i\frac{\hat{\mu}l_0}{2}} \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} e^{i\frac{\hat{\mu}l_0}{2}} \right) \right. \\ & \left. + \left(e^{-i\frac{\hat{\mu}l_0}{2}} \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} e^{-i\frac{\hat{\mu}l_0}{2}} - e^{i\frac{\hat{\mu}l_0}{2}} \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} e^{i\frac{\hat{\mu}l_0}{2}} \right) \widehat{\text{sgn}(v)} \right] \widehat{V}^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Para no recargar la notación, de ahora en adelante debemos asumir que los operadores de la parte geométrica y material actúan únicamente en sus respectivos espacios de Hilbert cinemáticos.¹

Propiedades de la ligadura hamiltoniana

El operador ligadura hamiltoniana definida en (7.1.2) comparte muchas propiedades con el estudiado en el Capítulo 2. En primer lugar \hat{C}_0 aniquila al estado $|v=0\rangle$ debido a las potencias repartidas a derecha e izquierda del operador inverso del volumen, y además deja el complemento ortogonal de ese estado invariante. Gracias a ello podemos desacoplar dicho estado, eliminando el análogo cuántico a la singularidad clásica de nuestra teoría, y restringir así nuestro análisis al complemento ortogonal de $|v=0\rangle$, que designaremos por $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$, y que es donde estará contenida la información relevante de las soluciones no triviales a la ligadura.

El operador $\widehat{\Omega}^2$ es el único operador geométrico no diagonal presente en la ligadura al actuar en $\widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$. Su actuación en un estado $|v\rangle \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ es

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}^2 = & -F_+(v+2)F_-^*(v+2)|v+4\rangle - F_-(v-2)F_+^*(v-2)|v-4\rangle \\ & + (|F_+(v)|^2 + |F_-(v)|^2)|v\rangle, \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

donde hemos introducido la notación

$$F_{\pm}(v) = \frac{\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2}{2} |v \pm 2|^{1/2} |v|^{1/2} [\text{sgn}(v \pm 2) + \text{sgn}(v)] \exp \{ \mp i[\bar{\mu}(v) + \bar{\mu}(v \pm 2)]l_0/2 \}, \quad (7.1.5)$$

con $\bar{\mu}(v) = \sqrt{\Delta}/(2\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta}v)^{1/3}$. A simple vista podemos deducir que el operador $\widehat{\Omega}^2$ sólo relaciona estados con soporte en puntos discretos separados por un paso de cuatro unidades constante en la etiqueta v . Además los productos $F_+(v+2)F_-^*(v+2)$ y $F_-(v-2)F_+^*(v-2)$, al tener en cuenta la definición (7.1.5), se anulan si $v \in [-4, 0]$ y $v \in (0, 4]$, respectivamente. Esto nos permite afirmar que diferentes orientaciones de la tríada nunca estarán relacionadas bajo la acción de $\widehat{\Omega}^2$. En conclusión, este operador sólo relaciona estados con soporte en semirredes de paso cuatro en la etiqueta v , es

¹En los Capítulos 1, 2 y 3, definimos el producto de operadores geométricos y materiales como el producto tensorial, y usamos una notación explícita que aquí obviaremos.

decir, con v en $\mathcal{L}_\varepsilon^\pm = \{\pm(\varepsilon + 4n), n \in \mathbb{N}\}$ donde $\varepsilon \in (0, 4]$ es el mismo parámetro continuo introducido en la Sección (1.2.3), proporcional al volumen mínimo permitido por la discretización de la geometría. Estos subespacios son preservados por todos los operadores de relevancia física en nuestra teoría, así que podemos interpretar que esos sectores son superseleccionados. De ahora en adelante los denotaremos por $\mathcal{H}_\pm^\varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, vamos a restringir nuestro estudio a $\mathcal{H}_+^\varepsilon$.

Para facilitar la comparación de nuestra prescripción para cuantizar la parte gravitacional de la ligadura con la utilizada en la Ref. [45], vamos a introducir una transformación unitaria $\hat{U} = e^{il_0\hat{h}(v)}$ en $\mathcal{H}_+^\varepsilon$, donde $\hat{h}(v)$ está dada por la Ec. (E.4) del Apéndice E. Esta transformación unitaria permite pasar de $\hat{\Omega}^2$ a

$$\hat{\Omega}_{sMMO}^2 = \hat{U}\hat{\Omega}^2\hat{U}^{-1}, \quad (7.1.6)$$

donde $\hat{\Omega}_{sMMO}$ es

$$\hat{\Omega}_{sMMO} = \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}}\hat{V}^{1/2}\left[\widehat{\text{sgn}(v)}(\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}}) + (\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}})\widehat{\text{sgn}(v)}\right]\hat{V}^{1/2}, \quad (7.1.7)$$

y se corresponde, salvo un factor de proporcionalidad, con el operador $\hat{\Theta}_{sMMO}$ definido en la Sección 3.1.4, asociado a un modelo de FLRW plano.

La contribución geométrica al operador ligadura hamiltoniana está dada por

$$\hat{C}_{\text{grav}} = -8\pi G\hbar^2 \left[\widehat{\frac{1}{V}}\right]^{1/2} \hat{\Theta} \left[\widehat{\frac{1}{V}}\right]^{1/2}. \quad (7.1.8)$$

con

$$\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_{sMMO} + \frac{3}{4\pi G\gamma^2\hbar^2} \left\{ (1 + \gamma^2)l_0^2\hat{V}^{4/3} - \frac{\hat{V}^2}{\Delta} \sin^2 \hat{\mu} l_0 \right\}. \quad (7.1.9)$$

En cuanto a la descomposición espectral de $\hat{\Theta}$, aunque no hemos realizado un estudio detallado, sí es de esperar que obtengamos resultados similares a los de las Refs. [45, 46] respecto a la autoadjunción y al análisis de su espectro. Allí se vio que la parte gravitacional de la ligadura es un operador esencialmente autoadjunto, con un espectro discreto que no incluye autovalores nulos y contenido en un semieje de la recta real. Además, cada autoespacio es en general bidimensional, siempre que se restrinja el operador correspondiente a un sector de superselección con soporte en redes, aunque esta degeneración desaparece al restringirlo al sector excepcional $\varepsilon = 2$, que es justamente el subespacio con soporte en una semirred, para el que los espacios propios son unidimensionales. Esta ausencia de degeneración es justo lo que cabe esperar para nuestra prescripción, puesto que todos sus sectores de superselección tienen soporte en semirredes. En conclusión, resulta natural suponer (en analogía con [45]) que la restricción de $\hat{\Theta}$ a $\mathcal{H}_+^\varepsilon$ es un operador esencialmente autoadjunto, definido positivo y con un espectro discreto no degenerado de autovalores estrictamente positivos.

Soluciones a la ligadura y espacio de Hilbert físico

Por conveniencia, vamos a cambiar la densitización del operador \hat{C}_0 . Si $(\psi|$ es cualquier solución de \hat{C}_0 (aquellas funciones aniquiladas por el adjunto de la ligadura), es esperable que estén bien definidas en el dual de un subespacio denso en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_+^\varepsilon$. Allí, la biyección $(\tilde{\psi}| = (\psi|[\widehat{1/V}]^{1/2}$ relaciona las soluciones de \hat{C}_0 con las de su versión densitizada

$$\hat{C}_0 = 8\pi G(-\hbar^2 \hat{\Theta} + \hat{p}_\phi^2 + \tilde{m}^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2). \quad (7.1.10)$$

Las soluciones de ésta se pueden escribir de forma general como

$$(\Psi| = \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} \int_{\mathbb{R}} d\phi \Psi(v, \phi) \langle v| \otimes (\phi|, \quad (7.1.11)$$

donde los coeficientes $\Psi(v, \phi) = (\Psi|[|v\rangle \otimes |\phi\rangle]$ satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} & f(v+2)\Psi(v+4, \phi) + f(v-2)\Psi(v-4, \phi) + \partial_\phi^2 \Psi(v, \phi) \\ &= \left[f_o(v) + 3\pi G v^2 \left\{ (1 + \gamma^2) l_0^2 \left(\frac{\Delta}{\mathcal{S}_\gamma v} \right)^{2/3} - \sin^2 \left[\frac{\Delta^{1/3} l_0}{(\mathcal{S}_\gamma v)^{1/3}} \right] \right\} + \Delta \mathcal{S}_\gamma \hbar^{-2} \tilde{m}^2 v^2 \right] \Psi(v, \phi). \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

Aquí, $\mathcal{S}_\gamma = 2\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2$, y las funciones $f(v)$ y $f_o(v)$ son los coeficientes del operador $\hat{\Theta}_{sMMO}$ definidos en las Ecs. (3.1.16). Debido a que $f(v-2)$ se anula si $v \in (0, 4]$, basta con conocer la solución evaluada en la sección de volumen mínimo $\Psi(\varepsilon, \phi)$ para determinar la solución en cualquier otra sección de volumen $v = \varepsilon + 4n$. En este sentido, podemos interpretar la Ec. (7.1.12) como una ecuación de evolución en el parámetro discreto v . Nos falta aún dotar a las soluciones con una estructura de espacio de Hilbert. Gracias a que éstas están determinadas a partir de sus datos iniciales en la sección de volumen mínimo, podemos identificar las soluciones con dichos datos. El espacio vectorial que definen esos datos se puede completar con un producto interno adecuado, siguiendo los resultados de las Refs. [146, 147] (una aplicación ilustrativa de éstos se puede encontrar, por ejemplo, en la Ref. [148]). Basta con determinar un conjunto completo de observables definidos en el espacio funcional de datos iniciales y exigirles condiciones de realidad (autoadjunción). Estas condiciones seleccionan la medida de integración de forma esencialmente única, fijando el producto interno. Es sencillo comprobar que el par de operadores introducidos en la Sección (1.2.1), que son justamente $\hat{\phi}$ y \hat{p}_ϕ , son esencialmente autoadjuntos en $L^2(\mathbb{R}, d\phi)$ respecto de la medida de Lebesgue $d\phi$ con la que está naturalmente equipada la recta real. Podemos así identificar el espacio de Hilbert físico para los datos iniciales con

$$\mathcal{H}^{\text{phys}} = L^2(\mathbb{R}, d\phi). \quad (7.1.13)$$

Este procedimiento es equivalente al utilizado en las Secciones (2.3) y (1.2.4). Pero dadas las particularidades del modelo en consideración, resulta más sencillo aplicar este último método para proporcionar el espacio de Hilbert físico. Además, hemos alcanzado ya un nivel de completitud razonable en esta tesis por el hecho de haber incluido diferentes procedimientos para determinar las soluciones físicas de un sistema cuántico.

7.2. Cuantización con inhomogeneidades: cuantización híbrida

Una vez que hemos cuantizado por completo un escenario esencialmente homogéneo e isótropo, pasamos a introducir inhomogeneidades de naturaleza escalar siguiendo básicamente los pasos de las Secciones 6.1 y 6.2. Allí vimos, una vez asumido que éstas se pueden incluir como perturbaciones, que el sistema resultante está determinado por un universo de FLRW con un campo escalar masivo homogéneo y mínimamente acoplado junto con contribuciones cuadráticas en las perturbaciones, descritas por tres variables dinámicas de tipo campo (y sus momentos canónicamente conjugados). El modelo, determinado por su hamiltoniano (6.1.7), presenta tres ligaduras: una ligadura escalar compuesta por una parte homogénea (6.1.3) y otra cuadrática en las inhomogeneidades (6.1.8) asociada al multiplicador de Lagrange N_0 (función lapso homogénea), otra ligadura escalar lineal en las perturbaciones (6.1.9) y cuyo multiplicador se identificó con la perturbación del lapso cuyos modos se correspondían con g_n , y finalmente una ligadura de difeomorfismos naturalmente asociada al vector desplazamiento 6.1.10 y cuyos modos se identificaron con k_n . Los grados de libertad constreñidos por las ligaduras (6.1.9) y (6.1.10) se pueden tratar por medio de un procedimiento de fijación de gauge. En la Sección 6.2 propusimos dos fijaciones diferentes, la primera comúnmente conocida como gauge longitudinal y que se introdujo en la Sección 6.2.1, y la segunda es un gauge en el que la métrica espacial es homogénea y cuyos detalles se explicaron en la Sección 6.2.2. Además, en ambos casos introdujimos una transformación canónica en el sistema resultante tras la fijación de gauge, con el ánimo de adaptar la teoría de campos a los criterios de unicidad del Capítulo 4, para alcanzar así una descripción cuántica consistente y privilegiada de las perturbaciones, como se demostró en la Sección 6.4. En la presente sección vamos a proporcionar una cuantización completa de este escenario inflacionario con pequeñas inhomogeneidades.

7.2.1. Variables de Ashtekar-Barbero

Las variables homogéneas introducidas por conveniencia en la Sección 6.1.1 deben ser identificadas con las de la Sección 7.1, ya que son estas últimas las que están bien adaptadas a una cuantización polimérica. En particular, debemos reescribir las variables $\{\bar{\alpha}, \bar{\pi}_\alpha\} = 1$ en términos del par canónico $\{c, p\} = 8\pi G\gamma/3$. De manera directa, podemos deducir la relación entre $\bar{\alpha}$ y p a través de la métrica espacial h_{ab} . Ambas cantidades están relacionadas mediante $|p| = l_0^2 \sigma^2 e^{2\bar{\alpha}}$ al orden perturbativo correspondiente. Además, uno puede ver que c debe ser una función lineal de $\bar{\pi}_\alpha$. Teniendo en cuenta esto, y que tras el cambio de variables se debe de recuperar la Ec. (7.1.1) para la ligadura hamiltoniana homogénea, un cálculo sencillo da

$$c = l_0(1 - \gamma e^{-2\bar{\alpha}} \bar{\pi}_\alpha), \quad |p| = l_0^2 \sigma^2 e^{2\bar{\alpha}}, \quad (7.2.1)$$

o equivalentemente

$$\bar{\pi}_\alpha = -\frac{p(c - l_0)}{\gamma l_0^3 \sigma^2}, \quad e^{2\bar{\alpha}} = \frac{|p|}{l_0^2 \sigma^2}. \quad (7.2.2)$$

Junto con esta relación, debemos recordar que la función lapso es $N_0 = \sigma \tilde{N}_0$. En cuanto al campo material, una sencilla comprobación permite concluir que

$$\bar{\varphi} = l_0^{3/2} \sigma \phi, \quad \bar{\pi}_\varphi = \frac{p_\phi}{l_0^{3/2} \sigma}. \quad (7.2.3)$$

Recordamos que $m = \sigma \tilde{m}$. Por último, llamaremos $N_0 C_0$ y $N_0 \tilde{C}_2^n$, respectivamente, a $\bar{N}_0 H_0$ y $\bar{N}_0 \tilde{H}_2^n$ expresadas en términos de estas nuevas variables ϕ , p_ϕ , p y c del sector homogéneo y, además, multiplicadas por un factor $16\pi G = 12l_0^3 \sigma^2$ para adoptar los convenios usuales en cosmología cuántica de lazos.

7.2.2. Prescripción cuántica

Para promover el sistema clásico a un modelo cuántico, conviene establecer primero un marco auxiliar o cinemático en el que definir los operadores que representan las ligaduras. A partir del espacio de fases construiremos un espacio de Hilbert cinemático, donde representar el álgebra de operadores fundamentales de la teoría.

Empecemos por considerar la misma representación explicada en las Secciones 1.2.1 y 1.2.2 para los grados de libertad homogéneos materiales y geométricos, respectivamente. Recordemos que el espacio de Hilbert cinemático asociado es $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$. En $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}}$, el operador $\hat{\phi}$ actúa por multiplicación, mientras que \hat{p}_ϕ es un operador diferencial. En el sector gravitacional, las variables fundamentales son flujos y holonomías

de conexiones $su(2)$, esencialmente representados, respectivamente, por el operador multiplicativo \hat{p} y los elementos de matriz de las holonomías $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}$ (incorporando ya la dinámica mejorada), ambos con una acción bien definida en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ [véanse las Ecs. (1.2.20) y (1.2.21)].

Para las perturbaciones, en el Capítulo 6 obtuvimos una descripción de Fock privilegiada, que se construía a partir de las variables $\bar{f}_{\mathbf{n}}$ y $\bar{\pi}_{f_{\mathbf{n}}}$. En un primer paso definimos las variables de destrucción y creación $(a_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}, a_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}^*)$ asociadas a cada modo y que están bien adaptadas a la representación de campo escalar sin masa [véase la Ec. (6.3.5)]. Estas variables pueden promoverse a los operadores cuánticos $\hat{a}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}$ y $\hat{a}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}^\dagger$ de tal modo que $[\hat{a}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}, \hat{a}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}^\dagger] = \delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$. Llamemos \mathcal{S} al espacio vectorial formado por combinaciones finitas de estados de M partículas

$$|\mathcal{M}\rangle = |M_3, M_4, \dots\rangle, \quad \sum_n M_n < \infty, \quad (7.2.4)$$

con $M_n \in \mathbb{N}$ el número de partículas del modo n -ésimo. A partir de aquí, junto con el producto escalar $\langle \mathcal{M} | \mathcal{M}' \rangle = \delta_{\mathcal{M}\mathcal{M}'}$, podemos construir el espacio de Hilbert cinemático de las inhomogeneidades como el espacio de Fock \mathcal{F} , obtenido completando el espacio vectorial \mathcal{S} con la norma dada. Notamos que los estados de M partículas definen una base ortonormal del espacio de Fock \mathcal{F} . Además, hemos asumido que tanto $\hat{a}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}$ como $\hat{a}_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}^\dagger$ actúan como la identidad en el sector homogéneo.

Podemos concluir que el espacio de Hilbert cinemático del modelo será el producto tensorial del correspondiente al sector homogéneo con el de las inhomogeneidades, o lo que es lo mismo

$$\mathcal{H}^{\text{kin}} = \mathcal{H}_{\text{grav}}^{\text{kin}} \otimes \mathcal{H}_{\text{mat}}^{\text{kin}} \otimes \mathcal{F}. \quad (7.2.5)$$

Antes de construir el operador de ligadura, vamos a presentar una prescripción o receta que nos va a permitir determinarlo de manera sistemática. En primer lugar, debemos notar que la complicada dependencia algebraica presente en las expresiones (6.2.11) y (6.2.25) para cada una de las fijaciones de gauge, respectivamente, contiene productos de variables que no conmutan. Este efecto se traduce cuánticamente en la llamada ambigüedad de orden de operadores. En nuestro caso, no estamos exentos de ella (al menos en la parte de la ligadura que contiene perturbaciones), pero podemos fijar parcialmente esta libertad de la siguiente manera:

1. Todas las contribuciones del tipo ϕp_ϕ van a representarse por $(\hat{\phi}\hat{p}_\phi + \hat{p}_\phi\hat{\phi})/2$, que es un operador simétrico en $\mathcal{H}_{\text{mat}}^{\text{kin}}$,
2. Cualquier potencia par $[(c - l_0)p]^{2k}$, con $k \in \mathbb{Z}$, va a ser identificada con los operadores $\hat{\Theta}_{(k)}^e = \left[\hat{\Omega}^2\right]^k$, contruidos a partir del operador positivo $\hat{\Omega}^2$ [véanse la

Ec. (7.1.3) y la Sección 2.1.3] aplicando el teorema espectral (se pueden encontrar más detalles en la Ref. [93]).

3. En caso de encontrar potencias impares del tipo $[(c - l_0)p]^{2k+1}$, la prescripción que se va a seguir es

$$[(c - l_0)p]^{2k+1} \rightarrow \widehat{\Theta}_{(k)}^o = |\widehat{\Omega}|^k \widehat{\Lambda} |\widehat{\Omega}|^k, \quad (7.2.6)$$

con $|\widehat{\Omega}| = \sqrt{\widehat{\Omega}^2}$ y

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda} &= \frac{1}{8i\sqrt{\Delta}} \widehat{V}^{1/2} \left[\widehat{\text{sgn}(v)} \left(e^{-i\hat{\mu}l_0} \hat{N}_{4\bar{\mu}} e^{-i\hat{\mu}l_0} - e^{i\hat{\mu}l_0} \hat{N}_{-4\bar{\mu}} e^{i\hat{\mu}l_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(e^{-i\hat{\mu}l_0} \hat{N}_{4\bar{\mu}} e^{-i\hat{\mu}l_0} - e^{i\hat{\mu}l_0} \hat{N}_{-4\bar{\mu}} e^{i\hat{\mu}l_0} \right) \widehat{\text{sgn}(v)} \right] \widehat{V}^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

Es fácil ver que el operador $\widehat{\Lambda}$ que acabamos de introducir es un operador en diferencias que sólo vincula estados con soporte en semirredes de paso cuatro en la etiqueta v . De este modo, cualquier potencia de $(c - l_0)p$ va a ser representada por un operador cuántico que preserva los sectores de superselección en el volumen homogéneo (véase la Sección 7.1.2).

7.2.3. Ligadura Hamiltoniana

Utilizando todos estos criterios, llegamos a la ligadura cuántica

$$\hat{C} = \hat{C}_0 + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \hat{C}_2^{\mathbf{n}}, \quad (7.2.8)$$

donde \hat{C}_0 es la ligadura homogénea definida en la Ec. (7.1.2), y

$$\hat{C}_2^{\mathbf{n}} = 6l_0^4 \sigma^2 \left[\frac{1}{V} \right]^{1/6} \left[\hat{N}^{\mathbf{n}} \left(2\omega_n + \frac{1}{\omega_n} \hat{F}_-^{\mathbf{n}} \right) + \frac{1}{2\omega_n} \left(\hat{X}_+^{\mathbf{n}} \hat{F}_+^{\mathbf{n}} + \frac{3i\omega_n \sigma^2}{\omega_n^2 - 3} \hat{X}_-^{\mathbf{n}} \hat{G} \right) \right] \left[\frac{1}{V} \right]^{1/6} \quad (7.2.9)$$

con

$$\hat{N}^{\mathbf{n}} = \hat{a}_{f_n}^\dagger \hat{a}_{f_n}, \quad \hat{X}_\pm^{\mathbf{n}} = (\hat{a}_{f_n}^\dagger)^2 \pm \hat{a}_{f_n}^2. \quad (7.2.10)$$

Los operadores $\hat{F}_\pm^{\mathbf{n}}$ y \hat{G} están definidos en el sector homogéneo y son diferentes para cada fijación de gauge.

Gauge longitudinal

Para el gauge longitudinal, hemos introducido los operadores

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\pm}^n &= -\frac{\sigma^2 l_0}{2} \left[\frac{1}{V} \right]^{2/3} \left(15\hat{p}_{\phi}^2 + 3\tilde{m}^2 \hat{p}^3 \hat{\phi}^2 + \frac{\hat{\Theta}_{(1)}^e}{\gamma^2 l_0^3 \sigma^2} \right) \left[\frac{1}{V} \right]^{2/3} + \frac{1}{2} + \frac{\tilde{m}^2}{l_0^2} \hat{p} \\ &\quad - \frac{3}{n^2 - 4} \frac{\sigma^2}{l_0} \left[\frac{1}{V} \right]^{4/3} \left(\frac{2}{\gamma} \hat{p}_{\phi} \hat{\Theta}_{(0)}^o + \tilde{m}^2 \hat{p}^3 \hat{\phi} \right)^2 \left[\frac{1}{V} \right]^{4/3} \pm 3\sigma^2 l_0 \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \hat{p}_{\phi}^2 \left[\frac{1}{V} \right]^{4/3},\end{aligned}\quad (7.2.11a)$$

$$\hat{G} = -\left[\frac{1}{V} \right] \left[\tilde{m}^2 \hat{p}^3 (\hat{\phi} \hat{p}_{\phi} + \hat{p}_{\phi} \hat{\phi}) + \frac{4}{\gamma} \hat{p}_{\phi}^2 \hat{\Theta}_{(0)}^o \right] \left[\frac{1}{V} \right]. \quad (7.2.11b)$$

Fijación de gauge alternativa

En el caso de la elección de gauge en la que la métrica espacial es homogénea e isotrópica, hemos definido los operadores

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\pm}^n &= -\frac{\sigma^2 l_0}{2} \left[3\tilde{m}^2 \hat{p} \hat{\phi}^2 - \frac{9}{4} \gamma^2 \sigma^2 l_0^3 \tilde{m}^2 (\hat{\phi} \hat{p}_{\phi} + \hat{p}_{\phi} \hat{\phi})^2 |\hat{p}|^{1/2} \hat{\Theta}_{(-1)}^e |\hat{p}|^{1/2} + 3\gamma^2 l_0^2 \hat{p}_{\phi}^2 \hat{\Theta}_{(-1)}^e \right. \\ &\quad \left. - 12\gamma \tilde{m}^2 (\hat{\phi} \hat{p}_{\phi} + \hat{p}_{\phi} \hat{\phi}) |\hat{p}|^{1/2} \hat{\Theta}_{(-1)}^o |\hat{p}|^{1/2} \right] + \frac{1}{2} + \frac{\tilde{m}^2}{l_0^2} \hat{p} \mp 3\sigma^2 l_0^3 \gamma^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \hat{p}_{\phi}^2 \hat{\Theta}_{(-1)}^e \\ &\quad + \frac{3\sigma^2 l_0}{n^2 - 4} \left[\frac{1}{V} \right]^{2/3} \left(2\hat{p}_{\phi} + \gamma \tilde{m}^2 \hat{\phi} |\hat{p}|^{3/2} \hat{\Theta}_{(-1)}^o |\hat{p}|^{3/2} - 3\gamma^2 \sigma^2 l_0^3 \hat{p}_{\phi}^3 \hat{\Theta}_{(-1)}^e \right)^2 \left[\frac{1}{V} \right]^{2/3} \\ &\quad + \frac{\sigma^2 l_0}{2} \left[\frac{1}{V} \right]^{2/3} \left(30\hat{p}_{\phi}^2 - \frac{\hat{\Theta}_{(1)}^e}{\gamma^2 l_0^3 \sigma^2} - 27\gamma^2 \sigma^2 l_0^3 \hat{p}_{\phi}^4 \hat{\Theta}_{(-1)}^e \right) \left[\frac{1}{V} \right]^{2/3}\end{aligned}\quad (7.2.12a)$$

$$\begin{aligned}\hat{G} &= 2\gamma l_0^2 \left[\frac{1}{V} \right]^{1/3} \left[\frac{\gamma \tilde{m}^2}{2} (\hat{\phi} \hat{p}_{\phi} + \hat{p}_{\phi} \hat{\phi}) |\hat{p}|^{3/2} \hat{\Theta}_{(-1)}^e |\hat{p}|^{3/2} - 3\gamma^2 \sigma^2 l_0^3 \hat{p}_{\phi}^4 |\hat{p}|^{1/2} \hat{\Theta}_{(-2)}^o |\hat{p}|^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{p}_{\phi}^2 \hat{\Theta}_{(-1)}^o \right] \left[\frac{1}{V} \right]^{1/3}.\end{aligned}\quad (7.2.12b)$$

Como vimos en la Sección 6.2.2, esta fijación de gauge está bien definida en el subespacio $\pi_{\alpha} \neq 0$, lo que equivale a $p(c - l_0) \neq 0$. Pero, en la correspondiente teoría cuántica, esta singularidad desaparece gracias a la prescripción que hemos adoptado, junto con el hecho de que el equivalente cuántico a π_{α} tiene un espectro continuo, siendo posible invertirlo aplicando el teorema espectral [93]. Por tanto, las potencias inversas de π_{α} , codificadas en los operadores $\hat{\Theta}_{(-1)}^o$, $\hat{\Theta}_{(-2)}^o$ y $\hat{\Theta}_{(-1)}^e$, están bien definidas, dotando de consistencia a nuestra propuesta.

Propiedades del operador ligadura

Antes de continuar, conviene resaltar que, para ambas fijaciones de gauge, cualquier ambigüedad en el orden de factores que afecte a $\hat{C}_2^{\mathbf{n}}$, al elegir una prescripción para cuantizar el modelo, produce únicamente contribuciones subdominantes a la geometría cuántica en los términos perturbativos de la ligadura completa.

De nuevo, la ligadura \hat{C} (para las dos fijaciones de gauge) aniquila el estado $|v=0\rangle$ (producto tensorial con cualquier estado en $\mathcal{H}_{\text{mat}}^{\text{kin}} \otimes \mathcal{F}$), y deja invariante su complemento ortogonal, $\tilde{\mathcal{H}}^{\text{kin}}$, al cuál podemos restringir nuestro estudio de ahora en adelante, eliminando el estado cuántico análogo a la singularidad cosmológica. Además, como hemos anticipado, el operador \hat{C} preserva los sectores de superselección en el volumen homogéneo, es decir semirredes de paso cuatro en la etiqueta v , ya que todos los operadores básicos que la constituyen preservan dichos sectores. De ahora en adelante, restringiremos todas nuestras consideraciones a un sector de superselección del tipo $\mathcal{H}_+^\varepsilon$ por simplicidad.

7.2.4. Soluciones y espacio de Hilbert físico

Finalmente, para completar el programa de cuantización que hemos presentado, vamos a caracterizar las soluciones a la ligadura. Estas soluciones cumplen $(\psi|\hat{C}^\dagger = 0$. Asumiremos que existe una jerarquía perturbativa similar a la de la ligadura, es decir

$$(\psi| = (\psi|^{(0)} + \epsilon^2(\psi|^{(2)}, \quad (7.2.13)$$

donde ϵ es el parámetro perturbativo introducido en la Sección 6.1.2.

Por consistencia, cualquier solución debe satisfacer, a cada orden perturbativo, las condiciones

$$(\psi|^{(0)}\hat{C}_0^\dagger = 0, \quad (\psi|^{(2)}\hat{C}_0^\dagger + (\psi|^{(0)}\sum_n(\hat{C}_2^{\mathbf{n}})^\dagger = 0. \quad (7.2.14)$$

La primera de ellas no es más que una solución a la ligadura del espaciotiempo de fondo. Sabemos, por lo que vimos en la Sección 7.1.2, que estas funciones $(\psi|^{(0)}$ tienen soporte en semirredes de paso cuatro y están completamente determinadas por los datos iniciales en la sección de volumen mínimo. En cuanto a la segunda relación podemos ver que, si nos olvidamos del segundo sumando, la contribución $(\psi|^{(2)}$ también sería una solución asociada al fondo con las mismas propiedades. Al incluir el término de interacción $(\psi|^{(0)}\sum_n(\hat{C}_2^{\mathbf{n}})^\dagger$ de las perturbaciones con el estado $(\psi|^{(0)}$, la función $(\psi|^{(2)}$ reflejará la manera en que el estado del universo cuántico de fondo interactúa con las inhomogeneidades cuánticas. Ahora sólo nos falta comprobar que la contribución $(\psi|^{(2)}$ se puede determinar a partir de sus datos iniciales definidos en la sección de volumen

mínimo. Para ello, basta con darse cuenta de que tanto \hat{C}_0 como los operadores que constituyen \hat{C}_2^n para cada modo preservan los sectores de superselección, constituidos por todos aquellos estados con soporte en semirredes de paso cuatro en v , y que la ecuación en diferencias para $(\psi|^{(2)}$ puede resolverse sin mayores problemas. Esto último se podría haber complicado sustancialmente debido a que \hat{C}_2^n involucra operadores cuya actuación no es local en la etiqueta v ; pero este término actúa siempre sobre estados determinados previamente, es decir sobre $(\psi|^{(0)}$.

En resumen, una vez proporcionado $(\psi|^{(0)}$ en la sección de volumen mínimo $v = \varepsilon$, puede encontrarse $(\psi|^{(0)}$ en todas las secciones de volumen constante, y luego introducir el resultado en la ecuación en diferencias para $(\psi|^{(2)}$, lo que, junto con sus correspondientes datos iniciales, la determina totalmente. Así puede construirse la solución $(\psi|$ deseada.

Finalmente, debemos construir el espacio de Hilbert físico equipando las soluciones con un producto interno adecuado. De nuevo, empleamos que el espacio de soluciones a la ligadura puede identificarse con el espacio de datos iniciales en la sección de volumen mínimo. Al igual que hicimos en la Sección 7.1.2, el producto escalar que estamos buscando se puede determinar a partir de condiciones de realidad sobre un conjunto completo de observables definidos en esos datos iniciales, como por ejemplo el conjunto formado por $\hat{\phi}$, \hat{p}_ϕ , $(\hat{a}_{\bar{f}_n} + \hat{a}_{\bar{f}_n}^\dagger)$ y $i(\hat{a}_{\bar{f}_n}^\dagger - \hat{a}_{\bar{f}_n})$. No es difícil comprobar que el espacio de Hilbert físico resultante es (unitariamente equivalente) a

$$\mathcal{H}^{\text{phys}} = \mathcal{H}_{\text{mat}}^{\text{kin}} \otimes \mathcal{F}. \quad (7.2.15)$$

7.3. Conclusiones

El estudio que acabamos de presentar proporciona una cuantización completa de un universo inflacionario con pequeñas inhomogeneidades. El contenido material está representado por un campo escalar masivo mínimamente acoplado. En primer lugar, hemos estudiado el sistema reducido tras imponer homogeneidad en la Sección 7.1. Para poder llevar a cabo una cuantización polimérica del sector homogéneo de la geometría, en la Sección 7.1.1 hemos parametrizado el correspondiente espacio de fases en términos de una tríada densitizada y una conexión de Ashtekar-Barbero [45]. Para el contenido material, sin embargo, hemos empleado una representación de Schrödinger estándar. Para representar la ligadura hamiltoniana, hemos proporcionado un operador que presenta buenas propiedades. Su parte geométrica es un operador en diferencias que sólo relaciona estados con soporte en semirredes de paso constante en el volumen físico. Estas semirredes se pueden clasificar por medio de un parámetro continuo no nulo $\varepsilon \in (0, 4]$, que es proporcional al volumen físico mínimo que permite la discretización de

la geometría. Además, hemos argumentado que cualquier sector del espacio de Hilbert cinemático con soporte en cualquiera de esas redes es superseleccionado. Cualquier estado físico del sistema debe en principio ser aniquilado por la ligadura, por lo que la restricción a un sector de superselección permite determinar cualquier solución de la misma si se proporcionan sus datos iniciales en la sección de volumen mínimo. La cuantización de este sistema se completa si equipamos el espacio de soluciones con un producto interno adecuado. Este producto se puede seleccionar [146–148] al requerir condiciones de realidad a un conjunto completo de observables definidos en el espacio de datos iniciales. El programa de cuantización presentado aquí no sólo nos permite completar la cuantización de este sistema en particular, sino que puede ser extendido a una gran variedad de escenarios cosmológicos en el contexto de la cosmología cuántica de lazos. Además, nuestros análisis previos sugieren que, seleccionando datos iniciales adecuados, es posible encontrar estados con un claro comportamiento semiclásico (en la región de volumen físico grande) correspondiente a un universo en expansión y otro en contracción, con un régimen cuántico prototípico descrito por un rebote cuántico que conecta ambos universos determinísticamente. Todos estos resultados son muy prometedores y deben ser estudiados cuidadosamente.

Por otro lado, sabemos que los universos inflacionarios proporcionan condiciones adecuadas para el desarrollo de pequeñas inhomogeneidades que, basándonos en el análisis semiclásico del Capítulo 6, son introducidas alrededor de las soluciones homogéneas por medio de perturbaciones cosmológicas. En particular, nuestro estudio se centra en perturbaciones de naturaleza escalar, tanto por su importancia física [136] como por las dificultades técnicas que entraña su implementación, puesto que involucra grados de libertad constreñidos por ligaduras cuyo tratamiento no es trivial. En este sentido, hemos considerado dos fijaciones de gauge diferentes. La primera es la conocida como gauge longitudinal, y la segunda es un gauge en el que la métrica espacial se reduce a una métrica homogénea e isotrópica. En ambos casos hemos alcanzado una descripción de las inhomogeneidades del sistema reducido en términos de las perturbaciones materiales, a las que hemos aplicado los resultados del Capítulo 6 sobre la adopción de una representación de Fock privilegiada, que satisface los criterios de unicidad del Capítulo 4. Con todo esto, hemos procedido a combinar la cuantización polimérica introducida inicialmente en la Sección 7.1.2 con la descripción de Fock mencionada para las inhomogeneidades. En la Sección 7.2.2 hemos presentado una prescripción para la cuantización del modelo, fijando así la gran ambigüedad existente a la hora de promover las cantidades clásicas a operadores cuánticos. Hemos sido capaces de construir un operador correspondiente a la ligadura hamiltoniana en la Sección 7.2.3, para cada una de las fijaciones de gauge. El operador resultante, en ambos casos, respeta los sectores de superselección asociados a la geometría del modelo homogéneo. Cualquier solución a

la ligadura tiene soporte en semirredes de paso constante en el volumen (homogéneo) físico, y se construye a partir de una sección de volumen mínimo. Además, hemos sido capaces de probar que, si uno asume que las soluciones están sujetas a una jerarquía perturbativa similar a la de la ligadura hamiltoniana, los estados físicos se dividen en una solución naturalmente asociada al espaciotiempo de fondo más otra parte que contiene la interacción de las inhomogeneidades con el estado cuántico del espaciotiempo por el que se propagan, y dichos estados están completamente determinados por sus datos iniciales, definidos en la sección de volumen mínimo $v = \varepsilon$. Finalmente, hemos introducido un producto interno en el espacio de datos iniciales para completar la cuantización, proporcionando así el espacio de Hilbert físico.

Conclusiones

En esta tesis hemos investigado la cuantización de diversos escenarios cosmológicos. Hemos propuesto una prescripción satisfactoria para la cuantización de un modelo de FLRW con un campo escalar sin masa en el contexto de la cosmología cuántica de lazos. Para introducir inhomogeneidades y poder tratarlas cuánticamente de forma consistente y robusta, hemos extendido ciertos resultados de unicidad sobre la cuantización de Fock de campos escalares en espaciotiempos no estacionarios. Finalmente, hemos combinado todos estos resultados para proporcionar una cuantización de un universo inflacionario que incorpora pequeñas inhomogeneidades.

Resultados

- Al cuantizar un modelo de FLRW plano acoplado a un campo escalar sin masa en el contexto de la cosmología cuántica de lazos, hemos propuesto un operador asociado a la ligadura hamiltoniana con un orden de factores alternativo al usual en la literatura y en el que la orientación de la tríada toma un papel esencial. Las ventajas que presenta esta nueva prescripción son:
 1. El nuevo operador permite desacoplar los estados de volumen nulo, lo que equivale a resolver la singularidad cosmológica inicial sin necesidad de determinar exactamente las soluciones a la ligadura.
 2. Al eliminar los estados de volumen nulo, podemos introducir un cambio de densitización de la ligadura en el formalismo cuántico de un modo completamente riguroso, y cuyo procedimiento podría extenderse sin mayores problemas a situaciones más generales.
 3. Este operador además tiene un dominio de definición muy sencillo, ya que no mezcla diferentes orientaciones de la tríada. De ello se deduce que los estados físicos del sistema emergen a partir de la sección de volumen mínimo que la discretización de la geometría permite.
- Las propiedades óptimas de la prescripción que hemos presentado tienen conse-

cuencias físicas de gran interés. Hemos demostrado que las autofunciones de la parte gravitacional de la ligadura, en el régimen de volumen grande, se comportan como ondas estacionarias exactas. Esto, junto con el hecho de que los estados alcanzan un volumen mínimo no nulo, permite concluir que un rebote cuántico es la única posibilidad viable, independientemente del estado que se considere.

- Para establecer las similitudes y diferencias existentes entre distintas prescripciones, hemos realizado una comparativa tanto analítica como numérica. En particular hemos considerado cuatro prescripciones: la propuesta de Ashtekar, Pawłowski y Singh (APS) que aparece en la Ref. [25], su versión simplificada (sLQC) [26], la prescripción (MMO) que proponemos en el Capítulo 2 (véase la Ref. [44]), y finalmente su versión simplificada (sMMO), que ha sido incluida en las Refs. [17, 58].
 1. En primer lugar, hemos hecho una comparativa analítica de las diferencias existentes. Por un lado, los sectores de superselección asociados a APS y sLQC coinciden, y son distintos en general de los que presentan las prescripciones MMO y sMMO. Éstos últimos resultan ser más simples. Por otro lado, a cada prescripción se le puede asociar una constante α que identificamos con la intensidad de un potencial y que se asocia a las contribuciones subdominantes de la ligadura gravitacional en el régimen de volumen grande. A este respecto, las prescripciones sLQC y sMMO comparten la misma etiqueta α .
 2. A cada estado físico se le puede asociar una función de onda construida a partir de las autofunciones de la parte gravitacional de la ligadura. Hemos visto que, para el caso de estados con una dispersión considerable y en la región donde aparece el rebote cuántico, se pueden observar diferencias cualitativas en el valor absoluto de la función de onda entre las prescripciones APS y sLQC, y las propuestas MMO y sMMO.
 3. Hemos calculado los valores esperados y las dispersiones de ciertos observables de interés en cosmología en cada prescripción, y los hemos comparado. Hemos visto que las diferencias entre valores esperados son varios órdenes de magnitud menores que las dispersiones. Por tanto, desde este punto de vista las prescripciones son similares. Sí se han observado diferencias cualitativas respecto a las dispersiones de la densidad de energía asociadas a las prescripciones APS y sLQC, por un lado, y MMO y sMMO, por el otro, siendo predominantes cerca del rebote cuántico.
- Todos estos resultados han podido obtenerse gracias a una extensión de la librería numérica originalmente desarrollada por Pawłowski. Hemos mejorado su

eficiencia, poniendo especial atención en los algoritmos que se encargan de calcular la base de autofunciones de la parte gravitacional de la ligadura, y que resulta ser la que más recursos numéricos consume. Hemos creado un algoritmo que permite comparar sistemáticamente diferentes prescripciones y que determina las diferencias de los valores esperados de ciertos observables en las distintas prescripciones.

- Por último, son destacables las diferencias existentes en cuanto a la eficiencia numérica se refiere. En particular, al generar la base de autofunciones, hemos comprobado que las prescripciones APS y sLQC son alrededor de ocho veces menos eficientes que las prescripciones MMO y sMMO, en relación al tiempo de cálculo. Además, a la hora de construir las soluciones a la ligadura, hemos visto también que las primeras necesitan un tiempo unas tres veces mayor que las segundas.
- Basándonos en los resultados existentes sobre la unicidad de una cuantización de Fock para un campo escalar que satisface una ecuación de ondas sujeto a un potencial cuadrático en un espaciotiempo estático con secciones espaciales cuya topología es la de una tres-esfera, hemos realizado un estudio sobre la posible aplicabilidad al considerar redefiniciones del campo. En concreto, hemos introducido una transformación canónica dependiente del tiempo y que consiste en un re-escalado del campo, el re-escalado inverso de su momento más una contribución a éste lineal en el campo y proporcional a otra función dependiente del tiempo. Hemos demostrado que no existe ninguna cuantización de Fock invariante bajo las simetrías asociadas a las secciones espaciales tal que admita una dinámica unitaria, a menos que la transformación canónica anterior sea constante.
- Además, hemos extendido los resultados de unicidad para la representación de Fock bajo los criterios de invariancia respecto a las simetrías espaciales y unitariedad de la dinámica, correspondientes a un campo escalar sujeto a un potencial cuadrático dependiente del tiempo y que se propaga en un espaciotiempo estático, al caso en el que las secciones espaciales tienen una topología compacta arbitraria, y siempre que su dimensión sea $d \leq 3$. Hemos visto que si las secciones espaciales tienen asociado un grupo de simetrías, cualquier representación de las relaciones canónicas de conmutación que sea invariante bajo dicho grupo y que admita una implementación unitaria de la dinámica pertenece a una única clase de cuantizaciones de Fock unitariamente equivalentes entre sí.
- Es más, también en este caso de topología compacta arbitraria en tres o menos dimensiones espaciales, al considerar una redefinición del campo por medio de una

transformación canónica dependiente del tiempo, como la mencionada anteriormente, que re-escala el campo por una función, su momento por el inverso de la misma, y que incluye un término en este último lineal en el campo y multiplicado por otra función dependiente del tiempo, hemos probado que los re-escalados del campo no son compatibles con los criterios de invariancia y unitariedad a menos que sean constantes. En cuanto al término que aparece en el momento canónico del campo y que es proporcional a este último, hay dos posibilidades:

1. Si la secuencia $\{\sqrt{g_n}/\omega_n\}$ no es de cuadrado sumable, donde g_n es la dimensión de los espacios propios del operador de Laplace-Beltrami con autovalor $-\omega_n^2$, la función dependiente del tiempo que multiplica el término mencionado debe ser constante. Ésta es la situación general para secciones espaciales de dimensión $d = 2, 3$.
 2. En caso de que la secuencia $\{\sqrt{g_n}/\omega_n\}$ sea de cuadrado sumable, una contribución así en el momento del campo es admisible, y no introduce ambigüedades en nuestra cuantización, por lo que respeta la unicidad. Éste es el caso de secciones espaciales con topologías compactas unidimensionales.
- Hemos considerado un escenario inflacionario en el que aplicar todos los resultados anteriores. Se trata de un espaciotiempo de FLRW con curvatura positiva acoplado a un campo escalar con masa, y pequeñas inhomogeneidades propagándose en él. En primer lugar, haciendo uso de la teoría de perturbaciones cosmológicas, hemos introducido pequeñas inhomogeneidades, que están descritas por campos lineales. Debido a las simetrías bajo difeomorfismos espaciotemporales, el modelo presenta ciertas ligaduras. Para eliminar los correspondientes grados de libertad no dinámicos locales, hemos realizado dos fijaciones de gauge diferentes. El sistema reducido está descrito por los grados de libertad (homogéneo+inhomogeneidades) materiales, el factor de escala y sus momentos canónicamente conjugados, sujetos a una ligadura hamiltoniana global. Además, por conveniencia y con la vista puesta en los resultados de unicidad para una cuantización de Fock de las inhomogeneidades, hemos introducido una transformación canónica completa en el sistema (incluyendo los grados de libertad homogéneos) que es fundamentalmente un re-escalado de la perturbación material por el factor de escala de la métrica espacial de FLRW.
 - Admitiendo inicialmente que el espaciotiempo de fondo se puede describir clásicamente, hemos aplicado una cuantización de Fock a la perturbación material en el sistema reducido, y demostrado que los criterios de invariancia bajo simetrías

espaciales y unitariedad en la evolución son aplicables para garantizar la unicidad: sólo existe una representación de Fock con esas propiedades. Además, hemos introducido una cuantización en términos de un par canónico construido con potenciales de Bardeen, invariantes de gauge, y probado que es unitariamente equivalente a la inicial.

- Para estudiar la manera en que las perturbaciones y el espaciotiempo de fondo interaccionan dentro de un escenario genuinamente cuántico, hemos aplicado una cuantización polimérica a los grados de libertad geométricos homogéneos, junto con una representación estándar para el contenido material. Si imponemos isotropía y homogeneidad, somos capaces de construir las soluciones de la ligadura hamiltoniana a partir de sus datos iniciales en la sección de volumen mínimo y de equiparlas con un producto interno, proporcionando el espacio de Hilbert físico del sistema.
- Al incluir inhomogeneidades, hemos adoptado una descripción de tipo Fock compatible con los criterios de unicidad mencionados, junto con la descripción anterior para los grados de libertad homogéneos dentro del contexto de la cosmología cuántica de lazos. Hemos diseñado una prescripción para la cuantización del sistema completo que resulta ser satisfactoria. Con esta prescripción, finalmente, hemos podido determinar las soluciones del operador ligadura hamiltoniana, además de equiparlas con un producto interno y así construir el espacio de Hilbert físico.

Conclusions

In this thesis, we have studied the quantization of various cosmological scenarios. We have proposed a satisfactory prescription for the quantization of an FLRW model coupled to a massless scalar field in the context of loop quantum cosmology. With the aim at introducing inhomogeneities and being able of treating then quantum mechanically in a consistent and robust manner, we have extended certain uniqueness results about the Fock quantization of scalar fields in non-stationary spacetimes. Finally, we have combined all these results to provide a complete quantization of an inflationary universe which incorporates small inhomogeneities.

Results

- When quantizing a flat FLRW model coupled to a massless scalar field in the context of loop quantum cosmology, we have proposed a new operator representing the Hamiltonian constraint with an alternative factor ordering with respect to the usual one found in the literature, and in which the triad orientation plays a fundamental role. The advantages of this new prescription are:
 1. The new operator allows one to decouple the states of vanishing volume, which amounts to removing the state corresponding to the classical cosmological singularity without requiring the exact determination of the solutions to the constraint.
 2. Once the states with vanishing volume have been removed, we can carry out a change of densitization of the Hamiltonian constraint at the quantum level in a fully rigorous way, following a natural procedure which could be extended to more general situations without major difficulties.
 3. Besides, this operator has a simple domain of definition, since it does not mix different triad orientations. Owing to this fact, one can conclude that the physical states of the system emerge out of the non-vanishing minimum volume section allowed by the discretization of the geometry.

- The optimal properties of our prescription have interesting physical consequences. We have proved that the eigenfunctions of the gravitational part of the constraint, in the large volume regime, behave as exact standing waves. This, together with the fact that the states reach a non-vanishing minimum volume, leads one to conclude that the only viable possibility is a quantum bounce replacing the big bang singularity, independently of the specific state considered.
- In order to establish the similarities and differences among the existing quantization prescriptions, we have carried out an analytic and numerical comparison. In particular, we have considered four prescriptions: the one proposed by Ashtekar, Pawłowski and Singh (APS) presented in Ref. [25], its solvable version (sLQC) [26], the prescription (MMO) proposed in Chapter 2 (see also Ref. [44]), and finally its simplified version (sMMO), already included in Refs. [17, 58].
 1. Firstly, we have carried out an analytic comparison of the existent differences. On the one hand, the superselection sectors associated with the prescriptions APS and sLQC coincide, and are different in general from the ones provided by MMO and sMMO, which turn out to be simpler. On the other hand, each prescription can be related with a constant α interpretable as the strength of a potential associated with subdominant contributions to the gravitational constraint in the large volume regime. In this respect, the sLQC and sMMO prescriptions share the same label α .
 2. Each physical state can be associated with a wave function build out of the eigenfunctions corresponding to the gravitational part of the constraint. We have seen that, for states with a considerable dispersion and in the regime in which the quantum bounce appears, one can observe qualitative differences in the absolute value of the wave function when comparing the prescriptions APS and sLQC with MMO and sMMO.
 3. The expectation values and dispersions of certain observables of interest in cosmology have been computed in each prescription, and they have been compared. We have observed that the differences between the expectation values are several orders of magnitude lower than the dispersions. Therefore, from this point of view the prescriptions are similar. However, we have observed qualitative discrepancies in the dispersions of the energy density when comparing APS and sLQC, on the one hand, with MMO and sMMO, on the other hand, being more relevant close to the quantum bounce.
- It has been possible to obtain all these results thanks to the development of the numerical library originally designed by Pawłowski. We have improved its

efficiency, paying special attention to the algorithms responsible of the computation of the eigenfunctions of the gravitational part of the constraint operator, which turns out to be the more expensive numerical process. Besides, we have implemented an algorithm to systematically compare different prescriptions and determine the differences of the expectation values of certain observables evaluated in each proposal.

- Finally, the differences regarding the numerical efficiency are remarkable. In particular, the calculation of the eigenfunction basis is around eight times more expensive for the prescriptions APS and sLQC than for the proposals MMO and sMMO, as far as the computation time is concerned. Moreover, in the generation of the solutions to the constraint, the proposals MMO and sMMO are around three times faster than the others.
- Based on existing results about the uniqueness of the Fock quantization of a scalar field fulfilling a wave equation in a static spacetime with spatial sections whose topology is that of a three-sphere and subject to a quadratic time-dependent potential, we have studied their possible applicability when considering field redefinitions. Specifically, we have introduced a time-dependent canonical transformation which consists of a scaling of the field by a time-dependent function, the inverse scaling of its momentum and the addition of a contribution to it which is linear in the field and proportional to another function of time. We have proven that there is no Fock quantization whose vacuum state is invariant under the isometry group $SO(4)$, associated with the spatial sections, and which admits a unitary implementation of the dynamics, unless the canonical transformation is constant.
- Besides, we have extended the uniqueness results for the Fock representation under the criteria of invariance under the spatial symmetries and unitarity of the dynamics, corresponding to a scalar field subject to a time-dependent quadratic potential and propagating in a static spacetime, to the case in which the spatial sections have an arbitrary compact topology and provided that their dimension is $d \leq 3$. We have seen that, if the spatial sections possess a symmetry group, any representation of the canonical commutation relations invariant under such a group and which admits a unitary implementation of the dynamics, belongs to a unique class of unitarily equivalent Fock quantizations.
- Moreover, also in this case of arbitrary compact topology in three or less spatial dimensions, if one considers new field descriptions reached by means of a time-dependent canonical transformation like the previously mentioned one –in which

the original field is scaled by a time-dependent function, its conjugate momentum by the inverse factor, and an additional term linear in the field and proportional to another function of time is added to the momentum—, we have proven that the scaling of the field is actually incompatible with the criteria of invariance and unitary evolution, unless it is a constant one. Concerning the additional term in the momentum which is linear in the field, there are two possibilities:

1. If the sequence $\{\sqrt{g_n}/\omega_n\}$ is not square summable, with g_n the dimension of the eigenspaces of the Laplace-Beltrami operator with eigenvalue $-\omega_n^2$, the time-dependent function multiplying that term must be constant. This is the general situation for compact spatial sections of dimension $d = 2, 3$.
 2. In the case that the sequence $\{\sqrt{g_n}/\omega_n\}$ be square summable, such a contribution in the momentum of the field is admissible, and does not introduce any ambiguity in our quantization, so that it respects the uniqueness. This is the case of unidimensional spatial compact topologies.
- We have considered an inflationary scenario in which to apply all the above results. It consists of a closed FLRW spacetime coupled to a massive scalar field, with small inhomogeneities propagating in it. Firstly, using cosmological perturbation theory, we have introduced small inhomogeneities, represented by linear scalar fields. Owing to the symmetries under spacetime diffeomorphisms, the model possesses some constraints. In order to remove the local, non-dynamical degrees of freedom we have performed two different gauge fixings. The reduced system is described by the homogeneous, gravitational degrees of freedom coupled to the matter content which includes the inhomogeneities, all of them subject to a global Hamiltonian constraint. Besides, for convenience and with an eye in the uniqueness results for a Fock quantization of the inhomogeneities, we have conveniently introduced a complete canonical transformation in the reduced system, which essentially consists of a scaling of the matter perturbation by the scale factor of the spatial metric.
 - Admitting initially that the background spacetime can be described classically, we have applied a Fock quantization to the matter perturbations in the reduced system, and proven that the criteria of invariance under the spatial symmetries and unitary dynamics are applicable in order to guarantee the uniqueness: there only exists a Fock representation with those properties. Moreover, we have considered another quantization in terms of Bardeen potentials, which are gauge invariants, and demonstrated that it is unitarily equivalent to the original one.

- In order to understand the way in which the perturbations and the background spacetime interact in a genuinely quantum setting, we have applied a polymeric quantization to the homogeneous sector of the geometry, together with a standard (Fock) quantization of the matter content, including the inhomogeneities. If we require strict homogeneity and isotropy, we can construct the solutions to the Hamiltonian constraint out of their initial data on the minimum volume section, and endow them with a Hilbert space structure, providing the physical Hilbert space of the system.
- When inhomogeneities are included, a privileged Fock description can be adopted by appealing to symmetry invariance and unitarity. Combining this representation for the perturbations with a quantization of the homogeneous sector within loop quantum cosmology, we have designed a satisfactory prescription for the construction of the constraint operator and provided a complete quantization of the system. Finally, we have been able to determine the solutions to the Hamiltonian constraint, equip them with an inner product, and thus construct the physical Hilbert space.

Apéndice

Apéndice A

Cuantización de Wheeler-deWitt: geometrodinámica

En este apéndice vamos a describir una cuantización estándar para un espaciotiempo de FLRW acoplado a un campo escalar sin masa homogéneo. Esta cuantización se conoce habitualmente como cuantización de Wheeler-deWitt (WDW) o geometrodinámica. Ha sido estudiada ampliamente en la literatura [62, 63], y nos va a ser útil en tanto en cuanto el mismo modelo pero cuantizado en el marco de la cosmología cuántica de lazos posee un límite de WDW bien definido.

En realidad, la construcción del modelo cuántico sigue líneas similares a las de cosmología cuántica de lazos. La diferencia esencial es que los grados de libertad geométricos se cuantizan con un procedimiento estándar, de Schrödinger, en el que la conexión c admite un operador cuántico bien definido (éste no es el caso en cosmología cuántica de lazos). El espacio de Hilbert cinemático está dado por el producto tensorial $\underline{\mathcal{H}}_{\text{kin}} = \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}} \otimes \underline{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$ donde $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{mat}}$ es el espacio de Hilbert definido en la Sección 1.2.1 y la parte gravitacional del espacio de Hilbert cinemático es $\underline{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{gr}} = L^2(\mathbb{R}, dv)$. En esta representación, la tríada actúa por multiplicación:

$$\hat{p}|v\rangle = \text{sgn}(v)(2\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta}|v|)^{2/3}|v\rangle, \quad (\text{A.1})$$

mientras que la conexión se identifica con el operador

$$2i(2\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2)^{1/3} \Delta^{-1/3} |v|^{1/6} \partial_v |v|^{1/6}. \quad (\text{A.2})$$

El operador análogo a $\hat{\Theta}$ (con un orden de factores compatible con la anterior definición) es

$$\underline{\hat{\Theta}} = -12\pi G \sqrt{|v|} \partial_v |v| \partial_v \sqrt{|v|}. \quad (\text{A.3})$$

Este operador es esencialmente autoadjunto en $\underline{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{gr}}$. Su espectro es positivo, doblemente degenerado y absolutamente continuo. Orientaciones opuestas de la tríada ($v > 0$)

y $v < 0$) no se relacionan a través de la acción de $\hat{\Theta}$, así que, para restringirse al sector simétrico, basta estudiar aquellos estados con soporte en $v > 0$ y luego extenderlos a $v < 0$ por simetría. En el sector simétrico, existe una base ortonormal de autofunciones generalizadas $(\underline{e}_k|$ de $\hat{\Theta}$ cuyos elementos son básicamente ondas planas amortiguadas por cierta potencia de v :

$$\underline{e}_{\pm k}(v) = (\underline{e}_{\pm k}|v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{\pm i k \ln v}, \quad v \in \mathbb{R}^+. \quad (\text{A.4})$$

Los autovalores correspondientes son $\omega^2 = 12\pi G k^2$. Estas autofunciones generalizadas están normalizadas a la delta de Dirac

$$(\underline{e}_k|\underline{e}_{k'}) = \delta(k - k'). \quad (\text{A.5})$$

El método de promedio sobre grupo se puede aplicar a este caso de una manera sencilla, y proporciona el espacio de Hilbert de estados físicos $\underline{\mathcal{H}}_{\text{phy}} = L^2(\mathbb{R}, dk) \ni \underline{\tilde{\Psi}}$, donde

$$\underline{\Psi}(v, \phi) = \int_{\mathbb{R}} dk \tilde{\Psi}(k) \underline{e}_k(v) e^{i\omega(k)\phi} \quad (\text{A.6})$$

y $\omega(k) = \sqrt{12\pi G}|k|$.

Apéndice B

Armónicos en la tres-esfera

En este apéndice vamos a resumir los aspectos más importantes de los armónicos $Q_{n\ell m}$ sobre la tres-esfera, S^3 . Para empezar, $Q_{n\ell m}$ constituye una base completa de funciones escalares respecto del producto interno naturalmente definido en la tres-esfera por el elemento de volumen de la métrica estándar con radio unidad, $\bar{\Omega}_{ab}$. Además, son autofunciones del operador de Laplace-Beltrami correspondiente a esa métrica, que tiene un espectro discreto y negativo determinado por los autovalores (cambiados de signo) $\omega_n^2 = n^2 - 1$, donde $n = 1, 2, \dots$. Cada uno de los espacios propios de este operador está degenerado, y su dimensión es $g_n = n^2$. Las etiquetas ℓ y m pueden tomar los valores $\ell = 0, \dots, n-1$ y $m = -\ell, \dots, \ell$, y codifican la degeneración de cada espacio propio. En otras palabras,

$$(Q_{n\ell m})|_a^a = -(n^2 - 1)Q_{n\ell m}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.1})$$

Aquí, el símbolo $|$ indica derivación covariante respecto de la métrica $\bar{\Omega}_{ab}$. Estas funciones, normalizadas con respecto al elemento de volumen en la tres-esfera, tienen la forma

$$Q_{n\ell m}(\chi, \theta, \sigma) = 2^{\ell+\frac{1}{2}}(\ell!) \sqrt{\frac{(n-\ell)!(n+1)}{\pi(n+\ell+1)!}} \sin^\ell(\chi) C_{n-\ell}^{(\ell+1)}[\cos(\chi)] Y_{\ell m}(\theta, \sigma), \quad (\text{B.2})$$

donde $Y_{\ell m}$ son los armónicos esféricos usuales en la dos-esfera y $C_{n-\ell}^{(\ell+1)}[\cos(\chi)]$ son los polinomios de Gegenbauer [149, 150]. Para cada n , esta base de autofunciones forma una representación irreducible del grupo $SO(4)$ (véase, por ejemplo, la Ref. [126]). Estas funciones son complejas, pero haciendo uso de las relaciones

$$Y_{\ell m}^* = (-1)^m Y_{\ell -m}, \quad (\text{B.3})$$

que se traducen en

$$Q_{n\ell m}^* = (-1)^m Q_{n\ell -m}, \quad (\text{B.4})$$

es posible construir de forma sencilla una base ortonormal de armónicos reales, que llamaremos $\tilde{Q}^{\mathbf{n}}$. En lo sucesivo, \mathbf{n} designa de forma compacta el triplete de índices (n, ℓ, m) .

A partir de esta base de armónicos escalares reales, podemos construir una base de armónicos vectoriales

$$\tilde{P}_a^{\mathbf{n}} = \frac{1}{n^2 - 1} \tilde{Q}_{|a}^{\mathbf{n}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{B.5})$$

formados con las derivadas covariantes de los escalares, y que satisfacen

$$(\tilde{P}_a^{\mathbf{n}})_{|b}^{|b} = -(n^2 - 3) \tilde{P}_a^{\mathbf{n}}, \quad (\tilde{P}_a^{\mathbf{n}})^{|a} = -\tilde{Q}^{\mathbf{n}}. \quad (\text{B.6})$$

Del mismo modo, podemos determinar una base de armónicos tensoriales escalares

$$\tilde{Q}_{ab}^{\mathbf{n}} = \frac{1}{3} \bar{\Omega}_{ab} \tilde{Q}^{\mathbf{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.7})$$

y armónicos tensoriales sin traza

$$\tilde{P}_{ab}^{\mathbf{n}} = \frac{1}{n^2 - 1} \tilde{Q}_{|ab}^{\mathbf{n}} + \frac{1}{3} \bar{\Omega}_{ab} \tilde{Q}^{\mathbf{n}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{B.8})$$

que cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} (\tilde{P}_{ab}^{\mathbf{n}})^{|b} &= -\frac{2}{3}(n^2 - 4) \tilde{P}_a^{\mathbf{n}}, & (\tilde{P}_{ab}^{\mathbf{n}})_{|c}^{|c} &= -(n^2 - 7) \tilde{P}_{ab}^{\mathbf{n}}, \\ (\tilde{P}_{ab}^{\mathbf{n}})^{|ab} &= \frac{2}{3}(n^2 - 4) \tilde{Q}^{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, si designamos la medida de integración en la tres-esfera por dv , y recuperamos la notación con el triplete de índices mostrados explícitamente, los armónicos esféricos anteriores satisfacen las condiciones de normalización

$$\int dv \tilde{Q}_{n\ell m} \tilde{Q}_{n'\ell'm'} = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{B.10})$$

y, a partir de ello,

$$\int dv (\tilde{P}_a)_{n\ell m} (\tilde{P}^a)_{n'\ell'm'} = \frac{1}{n^2 - 1} \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{B.11})$$

$$\int dv (\tilde{Q}_{ab})_{n\ell m} (\tilde{Q}^{ab})_{n'\ell'm'} = \frac{1}{3} \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (\text{B.12})$$

$$\int dv (\tilde{P}_{ab})_{n\ell m} (\tilde{P}^{ab})_{n'\ell'm'} = \frac{2n^2 - 4}{3n^2 - 1} \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (\text{B.13})$$

Apéndice C

Convergencia de las funciones oscilatorias

En este apéndice vamos a demostrar un resultado que será de utilidad en buena parte de las demostraciones sobre la unicidad de la cuantización de un campo escalar.

C.1. Secuencias de funciones oscilatorias

Queremos probar que las secuencias del tipo $\sin[w_n\tau + \theta_n(t)]$ no pueden tender a cero $\forall \tau \in [a, b]$ cuando $n \rightarrow \infty$, bajo ciertos requisitos suficientemente genéricos.

Llamemos $\tau = t - t_0$, con $t \in \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I} = [a, b]$ es un intervalo de la recta real con medida de Lebesgue $L = b - a$. Además, asumimos que

$$\mathbb{W} = \{w_n; n \in \mathbb{N}^+\} \quad (\text{C.1.1})$$

es una secuencia monótona y divergente de números reales positivos, es decir, que $w_{n+1} > w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$, con w_n no acotado para n suficientemente grande. Por otra parte, consideremos la secuencia

$$\{\theta_n(t); n \in \mathbb{N}^+\} \quad (\text{C.1.2})$$

de fases (funciones que toman valores en la recta real módulo 2π) doblemente derivables, sujetas a la condición de que existan ciertos números positivos X e Y tales que

$$|\dot{\theta}_n| < X, \quad |\ddot{\theta}_n| < Y, \quad (\text{C.1.3})$$

para todo n (mayor que un entero no negativo n_0) y en todo instante $t \in [a + t_0, b + t_0]$.

Con estas hipótesis, vamos a probar que

$$u_n(\tau) = \sin^2[w_n\tau + \theta_n(t)] \quad (\text{C.1.4})$$

no puede tender a cero $\forall \tau \in [a, b]$, lo que obviamente implica que tampoco $\sin(w_n\tau + \theta_n)$ puede tender a la función cero.

Las funciones $u_n(\tau)$ son claramente integrables, y un cálculo muy simple muestra que

$$\int_a^b u_n(\tau) d\tau = \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \int_a^b \cos[2w_n\tau - 2\theta_n(\tau + t_0)] d\tau. \quad (\text{C.1.5})$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos[2w_n\tau - 2\theta_n(\tau + t_0)] d\tau &= \frac{\sin[2w_nb - 2\theta_n(b + t_0)]}{2w_n - 2\dot{\theta}_n(b + t_0)} - \frac{\sin[2w_na - 2\theta_n(a + t_0)]}{2w_n - 2\dot{\theta}_n(a + t_0)} \\ &+ 2 \int_a^b \frac{\ddot{\theta}_n}{(2w_n + 2\dot{\theta}_n)^2} \sin[2w_n\tau - 2\theta_n(\tau + t_0)] d\tau, \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

y

$$\left| \int_a^b \frac{\ddot{\theta}_n}{(2w_n + 2\dot{\theta}_n)^2} \sin[2w_n\tau - 2\theta_n(\tau + t_0)] d\tau \right| \leq L \max_{\mathbb{I}} \left| \frac{\ddot{\theta}_n}{(2w_n + 2\dot{\theta}_n)^2} \right|. \quad (\text{C.1.7})$$

Como w_n es una secuencia monótona divergente, es sencillo comprobar que las condiciones (C.1.3) son suficientes para asegurar que la integral de $\cos[2w_n\tau - 2\theta_n(\tau + t_0)]$ sobre $[a, b]$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Por tanto, la secuencia de integrales $\int_a^b u_n(\tau) d\tau$ converge a $L/2$.

Por último, supongamos que la secuencia de funciones $u_n(\tau)$ converge a la función cero en el intervalo $[a, b]$. Como las funciones $|u_n(\tau)|$ están acotadas superiormente por la función constante de valor unidad, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue [103]. Este teorema asegura que la secuencia de integrales $\int_a^b u_n(\tau) d\tau$ debe converger en realidad a la integral de la función cero, o lo que es lo mismo, tiene límite nulo. Pero esto es incompatible con el hecho de que, como probamos anteriormente, $\int_a^b u_n(\tau) d\tau$ converge a $L/2$. Esta contradicción muestra que los valores de $u_n(\tau)$ no pueden tender a cero para todos los valores de $\tau \in [a, b]$, lo que concluye nuestra demostración.

C.2. Secuencias de productos

Vamos a probar ahora que secuencias del tipo $\sin(w_n\tau) \sin[w_n\tau - \delta_n]$ no pueden tender a cero en el límite $n \rightarrow \infty$, en cualquier subsecuencia de enteros positivos,

$\forall \tau \in \bar{\mathbb{I}}$, con

$$\mathbb{D} = \{\delta_n, n \in \mathbb{N}^+\} \quad (\text{C.2.1})$$

una secuencia de fases (es decir, números reales modulo 2π).

De nuevo, τ y $\mathbb{W} = \{w_n; n \in \mathbb{N}^+\}$ son el parámetro temporal y la secuencia monótona divergente de la sección anterior, respectivamente, y sea $L > 0$ un número arbitrario positivo. Entonces, la secuencia de elementos

$$x_n(\tau) = \sin(w_n \tau) \sin(w_n \tau - \delta_n) \quad (\text{C.2.2})$$

no puede tender a cero $\forall \tau \in [0, L]$.

Para demostrarlo, asumiremos desde el principio, sin pérdida de generalidad, que la secuencia formada por $\cos(\delta_n)$, con $\delta_n \in \mathbb{D}$, no tiende a cero cuando n tiende a infinito. Un cálculo sencillo muestra que

$$\int_0^L x_n(\tau) d\tau = \frac{L}{2} \cos(\delta_n) - \cos(w_n L - \delta_n) \frac{\sin(w_n L)}{2w_n}. \quad (\text{C.2.3})$$

Teniendo en cuenta el rango de las funciones trigonométricas, conseguimos las siguientes cotas, válidas para todos los enteros positivos n :

$$\frac{L}{2} \cos(\delta_n) + \frac{1}{2w_n} \geq \int_0^L x_n(\tau) d\tau \geq \frac{L}{2} \cos(\delta_n) - \frac{1}{2w_n}. \quad (\text{C.2.4})$$

Dado que $\cos(\delta_n)$ no tiende a cero, existe una subsecuencia $\mathbb{M}'' \subset \mathbb{N}^+$ y un número $\Delta > 0$ tal que $|\cos(\delta_n)| \geq \Delta$, $\forall n \in \mathbb{M}''$. Entonces, existe una subsecuencia $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}''$ tal que

$$\cos(\delta_n) \geq \Delta \quad \forall n \in \mathbb{M}', \quad (\text{C.2.5})$$

o

$$\cos(\delta_n) \leq -\Delta \quad \forall n \in \mathbb{M}' \quad (\text{C.2.6})$$

(ambos tipos de secuencias pueden existir).

Consideremos la primera situación (C.2.5). Como la secuencia de números positivos $1/w_n$ (con $w_n \in \mathbb{W}$) tiende a cero para n grande, uno siempre puede encontrar un entero positivo $n_0 \in \mathbb{M}'$ tal que $L\Delta > 1/w_{n_0}$. Asimismo, dado que $w_{n+1} > w_n$ en \mathbb{W} , de la segunda igualdad en la Ec. (C.2.4) se obtiene que la integral considerada está acotada inferiormente en la secuencia mencionada por un número positivo:

$$\int_0^L x_n(\tau) d\tau \geq \frac{L\Delta}{2} - \frac{1}{2w_{n_0}} > 0, \quad \forall n > n_0, \quad n \in \mathbb{M}'. \quad (\text{C.2.7})$$

Queda claro que la segunda posibilidad (la existencia de una secuencia \mathbb{M}' tal que $\cos(\delta_n) \leq -\Delta$) da lugar a una cota superior, por argumentos similares. Teniendo en

cuenta ambas posibilidades, concluimos [si $\cos(\delta_n)$ no tiende a cero] que existen números positivos Δ , $n_0 \in \mathbb{N}^+$ y $M = L\Delta - 1/w_{n_0}$, además de una subsecuencia $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}^+$ tales que

$$\left| \int_0^L x_n(\tau) d\tau \right| \geq \frac{M}{2} \quad \forall n \in \mathbb{M}. \quad (\text{C.2.8})$$

La secuencia \mathbb{M} está formada por los elementos de \mathbb{M}' que cumplen $n > n_0$.

Supongamos ahora que la secuencia de funciones $x_n(\tau)$ converge a la función cero en $[0, L]$. Dado que, como es obvio, las funciones $|x_n(\tau)|$ están acotadas superiormente por la unidad, podemos hacer uso del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue [103], que nos asegura que la secuencia de integrales $\int_0^L x_n(\tau) d\tau$ debe converger a la integral de la función cero, y por tanto debe tener límite nulo. Pero esta conclusión es incompatible con la cota que se dedujo en la Ec. (C.2.8). Debido a ello, no es posible que la secuencia formada por $x_n(\tau)$ converja a un límite nulo $\forall \tau \in [0, L]$.

Para concluir la prueba, sólo nos falta comprobar el caso $\cos(\delta_n) \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. En este caso, el límite nulo de $x_n(\tau)$ implica que $\sin(2w_n\tau)$ debe tender a cero, y, por tanto, también debe hacerlo $\sin^2(2w_n\tau)$. Pero este caso ya está incluido en los resultados de la sección anterior.

Apéndice D

Geometría espectral aplicada al operador de Laplace-Beltrami

En este apéndice vamos a probar un resultado sobre el operador de Laplace-Beltrami que hemos utilizado a lo largo de esta tesis: que en variedades riemannianas compactas de tres o menos dimensiones, la suma $S = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n/\omega_n^4)$ es finita. Recordamos que $\{\omega_n\}$ es la secuencia, estrictamente creciente, formada por los autovalores del operador de Laplace-Beltrami, cambiados de signo, y g_n la degeneración correspondiente a cada espacio propio.

Usaremos el resultado conocido en la literatura [134, 135] de que el número de autofunciones con autovalor (en módulo) menor o igual que $\omega_{\bar{n}}^2$, esto es, $\sum_{n=1}^{\bar{n}} g_n$, no crece más rápido que $\omega_{\bar{n}}^d$ cuando $\bar{n} \rightarrow \infty$. Específicamente, emplearemos que se puede encontrar entonces un entero n_0 a partir del cual el número de autofunciones toma la expresión $\omega_{\bar{n}}^d f(\omega_{\bar{n}})$ para alguna función f no creciente. La suma $S_0 = \sum_{n=1}^{n_0} (g_n/\omega_n^4)$, para n desde 1 hasta n_0 , da una contribución finita, por lo que podemos ignorarla. Para $n > n_0$, por otra parte, tenemos que

$$0 < g_n = \omega_n^d f(\omega_n) - \omega_{n-1}^d f(\omega_{n-1}) \leq f(\omega_{n-1})(\omega_n^d - \omega_{n-1}^d) \leq f(\omega_{n_0})(\omega_n^d - \omega_{n-1}^d). \quad (\text{D.1})$$

Por tanto,

$$S = S_0 + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{g_n}{\omega_n^4} \leq S_0 + f(\omega_{n_0}) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\omega_n^d - \omega_{n-1}^d}{\omega_n^4}. \quad (\text{D.2})$$

Es obvio que la última suma en esta expresión converge si $d < 3$. Veamos el caso restante $d = 3$. Usamos que

$$\omega_n^3 - \omega_{n-1}^3 = (\omega_n - \omega_{n-1})[\omega_n^2 + \omega_n \omega_{n-1} + \omega_{n-1}^2] \leq 3\omega_n^2(\omega_n - \omega_{n-1}). \quad (\text{D.3})$$

Entonces, para $d = 3$, tenemos que

$$S \leq S_0 + 3f(\omega_{n_0}) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\omega_n^2}. \quad (\text{D.4})$$

A continuación, empleamos

$$\frac{1}{\omega_n} - \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n^2} \leq \frac{1}{\omega_{n-1}} - \frac{1}{\omega_n}, \quad (\text{D.5})$$

que puede reescribirse como

$$2 \leq \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} + \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}. \quad (\text{D.6})$$

Alternativamente, esta última desigualdad puede deducirse usando que la función $h(x) = x + (1/x)$ sobre el eje real positivo alcanza un mínimo en $x = 1$, con $h(1) = 2$, y comparando ese mínimo con el valor en $x = \omega_n/\omega_{n-1}$. Con esta desigualdad, obtenemos que $S \leq S_0 + 3f(\omega_{n_0})S_1$ con

$$S_1 = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega_{n-1}} - \frac{1}{\omega_n} \right]. \quad (\text{D.7})$$

Las sumas parciales de los términos que proporcionan S_1 (truncando la suma en $n = \bar{n}$) se pueden evaluar exactamente, y son iguales a $(1/\omega_{n_0}) - (1/\omega_{\bar{n}})$. La secuencia de sumas parciales es estrictamente creciente y acotada superiormente por $1/\omega_{n_0}$, así que converge. Esto concluye nuestra demostración.

Apéndice E

Transformación unitaria en topologías de curvatura positiva

En este apéndice vamos a construir una transformación unitaria que permite eliminar las fases complejas que aparecen en la definición del operador $\hat{\Omega}^2$ construido a partir de la Ec. (7.1.3). Puede verse que

$$\hat{\Omega}^2 = -\hat{N}_{2\bar{\mu}}\hat{F}_+(v)\hat{F}_-^\dagger(v)\hat{N}_{2\bar{\mu}} - \hat{N}_{-2\bar{\mu}}\hat{F}_-(v)\hat{F}_+^\dagger(v)\hat{N}_{-2\bar{\mu}} + (|\hat{F}_+(v)|^2 + |\hat{F}_-(v)|^2), \quad (\text{E.1})$$

donde las funciones $F_\pm(v)$ están definidas en la Ec. (7.1.5). En primer lugar, introducimos la siguiente exponenciación compleja de una función $h(v)$

$$\hat{U} = e^{il_0\hat{h}(v)}, \quad (\text{E.2})$$

donde l_0 es la raíz cúbica del volumen fiducial de la celda considerada. Seguidamente, calculamos el operador $\hat{U}\hat{\Omega}^2\hat{U}^{-1}$. Para ello, basta con centrarse en la transformación del primer sumando de (E.1), puesto que el segundo es el adjunto del primero, y el término diagonal permanece invariante bajo esa transformación. No es difícil comprobar que las fases complejas se cancelan si

$$h(v+2) - h(v-2) = \frac{\bar{\mu}(v+2)}{2} + \frac{\bar{\mu}(v-2)}{2} + \bar{\mu}(v), \quad \forall v. \quad (\text{E.3})$$

Si ahora cambiamos la etiqueta $v \rightarrow v+2$ y nos restringimos a un sector de superselección $\mathcal{H}_+^\varepsilon$, podemos obtener de forma explícita la función $h(v)$ de manera recursiva:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \frac{\bar{\mu}(\varepsilon)}{2}, \\ h(\varepsilon+4) &= \frac{\bar{\mu}(\varepsilon+4)}{2} + \bar{\mu}(\varepsilon+2) + \frac{\bar{\mu}(\varepsilon)}{2} + h(\varepsilon) = \frac{\bar{\mu}(\varepsilon+4)}{2} + \bar{\mu}(\varepsilon+2) + \bar{\mu}(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(\varepsilon + 8) &= \frac{\bar{\mu}(\varepsilon + 8)}{2} + \bar{\mu}(\varepsilon + 6) + \frac{\bar{\mu}(\varepsilon + 4)}{2} + h(\varepsilon + 4) = \\
&= \frac{\bar{\mu}(\varepsilon + 8)}{2} + \bar{\mu}(\varepsilon + 6) + \bar{\mu}(\varepsilon + 4) + \bar{\mu}(\varepsilon + 2) + \bar{\mu}(\varepsilon), \\
&\vdots \\
h(\varepsilon + 4n) &= \frac{\bar{\mu}(\varepsilon + 4n)}{2} + \sum_{j=0}^{2n-1} \bar{\mu}(\varepsilon + 2j) \quad (n > 0).
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Por tanto, el operador $\widehat{\Omega}^2$ se transforma en $\widehat{\Omega}_0^2$ [véase la Ec. (7.1.7)]. Conviene comentar que, cuando $n \rightarrow \infty$, la suma que aparece en la Ec. (E.4) converge a la integral $\int dv v^{-1/3} \sim v^{2/3}$, que es justamente la función empleada en la Ref. [45] para implementar la correspondiente transformación unitaria.

Publicaciones

La investigación realizada en esta tesis ha dado lugar ya a 7 publicaciones y 4 trabajos más enviados a *Phys. Rev. D*, *J. Phys. Conf. Ser.* y *AIP Conf. Proc.*:

- M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Further Improvements in the Understanding of Isotropic Loop Quantum Cosmology*, *Phys. Rev. D* **80**, 104015 (2009), arXiv:0909.2829 [gr-qc].
- J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *A Unique Fock Quantization for Fields in Non-Stationary Spacetimes*, *JCAP* **1010**, 030 (2010), arXiv:1004.5320 [gr-qc].
- J. Olmedo, M. Martín-Benito y G. A. Mena Marugán, *Further Improvements in the Understanding of LQC*, *J. Phys. Conf. Ser.* **314**, 012048 (2011).
- J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Quantization of Fields with Unitary Dynamics in Nonstationary Spacetimes*, *Phys. Rev. D* **83**, 025002 (2011), arXiv:1101.2397 [gr-qc].
- G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y T. Pawłowski, *Prescriptions in Loop Quantum Cosmology: A Comparative Analysis*, *Phys. Rev. D* **84**, 064012 (2011), arXiv:1108.0829 [gr-qc].
- J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *A Uniqueness Criterion for the Fock Quantization of Scalar Fields with Time Dependent Mass*, *Class. Quant. Grav.* **28**, 172001 (2011), arXiv:1106.5000 [gr-qc].
- J. Cortez, G. A. Mena Marugan, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Criteria for the Determination of Time Dependent Scalings in the Fock Quantization of Scalar Fields (enviado a Phys. Rev. D)*, arXiv:1202.6330 [gr-qc].

- M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Unique Fock Quantization of Scalar Cosmological Perturbations*, Physical Review D (*en prensa*), arXiv:1203.2525 [gr-qc].
- J. Olmedo, M. Fernández-Méndez y G. A. Mena Marugán, *Inflation and Inhomogeneities: A Hybrid Quantization* (*aceptado en J. Phys. Conf. Ser.*).
- J. Olmedo, M. Fernández-Méndez y G. A. Mena Marugán, *Inflation and Inhomogeneities: A Hybrid Quantization* (*enviado a AIP Conf. Proc.*).
- M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Inhomogeneities and Inflation in Loop Quantum Cosmology: A Hybrid Approach* (*enviado a Phys. Rev. D*).

Bibliografía

- [1] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, Londres, 2007).
- [2] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Londres, 2004).
- [3] A. Ashtekar y J. Lewandowski, *Background Independent Quantum Gravity: A Status Report*, Class. Quant. Grav. **21**, R53 (2004), arXiv:gr-qc/0404018.
- [4] H. Sahlmann, *Loop Quantum Gravity - A Short Review*, arXiv:1001.4188.
- [5] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, Nueva York, 1964).
- [6] H. Sahlmann y T. Thiemann, *Irreducibility of the Ashtekar-Isham-Lewandowski Representation*, Class. Quant. Grav. **23**, 4453 (2006), arXiv:gr-qc/0303074.
- [7] J. Lewandowski, A. Okolow, H. Sahlmann y T. Thiemann, *Uniqueness of Diffeomorphism Invariant States on Holonomy-Flux Algebras*, Commun. Math. Phys. **267**, 703 (2006), arXiv:gr-qc/0504147.
- [8] C. Fleischhack, *Representations of the Weyl Algebra in Quantum Geometry*, Commun. Math. Phys. **285**, 67 (2009), arXiv:math-ph/0407006.
- [9] K. Giesel y T. Thiemann, *Algebraic Quantum Gravity (AQG) IV. Reduced Phase Space Quantisation of Loop Quantum Gravity*, Class. Quant. Grav. **27**, 175009 (2010), arXiv:0711.0119 [gr-qc].
- [10] M. Domagala, K. Giesel, W. Kamiński y J. Lewandowski, *Gravity Quantized: Loop Quantum Gravity with a Scalar Field*, Phys. Rev. D **82**, 104038 (2010), arXiv:1009.2445 [gr-qc].
- [11] V. Husain y T. Pawłowski, *Time and a Physical Hamiltonian for Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **108**, 141301 (2012), arXiv:1108.1145 [gr-qc].

- [12] A. Ashtekar, *An Introduction to Loop Quantum Gravity Through Cosmology*, Nuovo Cim. **122B**, 135 (2007), arXiv:gr-qc/0702030.
- [13] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology*, Living Rev. Rel. **11**, 4 (2008).
- [14] A. Ashtekar, *Loop Quantum Cosmology: An Overview*, Gen. Rel. Grav. **41**, 707 (2009), arXiv:0812.0177 [gr-qc].
- [15] G. A. Mena Marugán, *A Brief Introduction to Loop Quantum Cosmology*, AIP Conf. Proc. **1130**, 89 (2009), arXiv:0907.5160 [gr-qc].
- [16] A. Ashtekar y P. Singh, *Loop Quantum Cosmology: A Status Report*, Class. Quant. Grav. **28**, 213001 (2011), arXiv:1108.0893 [gr-qc].
- [17] K. Banerjee, G. Calcagni y M. Martín-Benito, *Introduction to Loop Quantum Cosmology*, arXiv:1109.6801 [gr-qc].
- [18] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology. I: Kinematics*, Class. Quant. Grav. **17**, 1489 (2000), arXiv:gr-qc/9910103.
- [19] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology. II: Volume Operators*, Class. Quant. Grav. **17**, 1509 (2000), arXiv:gr-qc/9910104.
- [20] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology. III: Wheeler-DeWitt Operators*, Class. Quant. Grav. **18**, 1055 (2001), arXiv:gr-qc/0008052.
- [21] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology. IV: Discrete Time Evolution*, Class. Quant. Grav. **18**, 1071 (2001), arXiv:gr-qc/0008053.
- [22] A. Ashtekar, M. Bojowald y J. Lewandowski, *Mathematical Structure of Loop Quantum Cosmology*, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 233 (2003), arXiv:gr-qc/0304074.
- [23] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum Nature of the Big Bang*, Phys. Rev. Lett. **96**, 141301 (2006), arXiv:gr-qc/0602086.
- [24] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum Nature of the Big Bang: An Analytical and Numerical Investigation*, Phys. Rev. D **73**, 124038 (2006), arXiv:gr-qc/0604013.
- [25] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum Nature of the Big Bang: Improved Dynamics*, Phys. Rev. D **74**, 084003 (2006), arXiv:gr-qc/0607039.
- [26] A. Ashtekar, A. Corichi y P. Singh, *On the Robustness of Key Features of Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **77**, 024046 (2008), arXiv:0710.3565 [gr-qc].

- [27] W. Kamiński, J. Lewandowski y T. Pawłowski, *Physical Time and Other Conceptual Issues of QG on the Example of LQC*, Class. Quant. Grav. **26**, 035012 (2009), arXiv:0809.2590 [gr-qc].
- [28] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (Chicago University Press, Chicago, 1994).
- [29] R. H. Gowdy, *Vacuum Space-Times with Two Parameter Spacelike Isometry Groups and Compact Invariant Hypersurfaces: Topologies and Boundary Conditions*, Ann. Phys. **83**, 203 (1974).
- [30] R. H. Gowdy, *Gravitational Waves in Closed Universes*, Phys. Rev. Lett. **27**, 826 (1971).
- [31] A. Corichi, J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Quantum Gowdy T^3 Model: A Uniqueness Result*, Class. Quant. Grav. **23**, 6301 (2006), arXiv:gr-qc/0607136.
- [32] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Representation of the Gowdy $S^1 \times S^2$ and S^3 Models*, Class. Quant. Grav. **25**, 105005 (2008), arXiv:0802.3338 [gr-qc].
- [33] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, R. Serôdio y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Quantization of a Free Scalar Field on S^1 with Time Dependent Mass*, Phys. Rev. D **79**, 084040 (2009), arXiv:0903.5508 [gr-qc].
- [34] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Fock Quantization of a Scalar Field with Time Dependent Mass on the Three-Sphere: Unitarity and Uniqueness*, Phys. Rev. D **81**, 044037 (2010), arXiv:1001.0946 [gr-qc].
- [35] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Quantization of the Gowdy T^3 Model*, Phys. Rev. D **75**, 084027 (2007), arXiv:gr-qc/0702117.
- [36] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman y R. H. Brandenberger, *Theory of Cosmological Perturbations*, Phys. Rept. **215**, 203 (1992).
- [37] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [38] E. Lifshitz, *Perturbation Theory*, Zh. Eksp. Teor. Fiz **16** (1946).
- [39] S. W. Hawking, *Perturbations of an Expanding Universe*, Astrophys. J. **145**, 544 (1966).

- [40] J. M. Bardeen, *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).
- [41] A. R. Liddle y D. H. Lyth, *Inflation and Large-scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [42] J. J. Halliwell y S. W. Hawking, *The Origin of Structure in the Universe*, Phys. Rev. D **31**, 1777 (1985).
- [43] A. Ashtekar y D. Sloan, *Loop Quantum Cosmology and Slow Roll Inflation*, Phys. Lett. B **694**, 108 (2010), arXiv:0912.4093 [gr-qc].
- [44] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Further Improvements in the Understanding of Isotropic Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **80**, 104015 (2009), arXiv:0909.2829 [gr-qc].
- [45] A. Ashtekar, T. Pawłowski, P. Singh y K. Vandersloot, *Loop Quantum Cosmology of $k=1$ FRW Models*, Phys. Rev. D **75**, 024035 (2007), arXiv:gr-qc/0612104.
- [46] Ł. Szulc, W. Kamiński y J. Lewandowski, *Closed Friedmann-Robertson-Walker Model in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quant. Grav. **24**, 2621 (2007), arXiv:gr-qc/0612101.
- [47] K. Vandersloot, *Loop Quantum Cosmology and the $k=-1$ Robertson-Walker Model*, Phys. Rev. D **75**, 023523 (2007), arXiv:gr-qc/0612070.
- [48] Ł. Szulc, *Open FRW Model in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quant. Grav. **24**, 6191 (2007), arXiv:0707.1816 [gr-qc].
- [49] E. Bentivegna y T. Pawłowski, *Anti-deSitter Universe Dynamics in LQC*, Phys. Rev. D **77**, 124025 (2008), arXiv:0803.4446 [gr-qc].
- [50] W. Kamiński y T. Pawłowski, *The LQC Evolution Operator of FRW Universe with Positive Cosmological Constant*, Phys. Rev. D **81**, 024014 (2010), arXiv:0912.0162 [gr-qc].
- [51] T. Pawłowski y A. Ashtekar, *Positive Cosmological Constant in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **85**, 064001 (2012), arXiv:1112.0360 [gr-qc].
- [52] L. Bianchi, *Sugli Spazii a Tre Dimensioni che Ammettono un Gruppo Continuo di Movimenti (On the Spaces of Three Dimensions that Admit a Continuous Group of Movements)*, Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat. **11** (1897).

- [53] D.-W. Chiou, *Loop Quantum Cosmology in Bianchi Type I Models: Analytical Investigation*, Phys. Rev. D **75**, 024029 (2007), arXiv:gr-qc/0609029.
- [54] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Loop Quantization of Vacuum Bianchi I Cosmology*, Phys. Rev. D **78**, 064008 (2008), arXiv:0804.3157 [gr-qc].
- [55] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, *Loop Quantum Cosmology of Bianchi I Models*, Phys. Rev. D **79**, 083535 (2009), arXiv:0903.3397 [gr-qc].
- [56] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, *Loop Quantum Cosmology of Bianchi Type II Models*, Phys. Rev. D **80**, 123532 (2009), arXiv:0910.1278 [gr-qc].
- [57] E. Wilson-Ewing, *Loop Quantum Cosmology of Bianchi Type IX Models*, Phys. Rev. D **82**, 043508 (2010), arXiv:1005.5565 [gr-qc].
- [58] G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y T. Pawłowski, *Prescriptions in Loop Quantum Cosmology: A Comparative Analysis*, Phys. Rev. D **84**, 064012 (2011), arXiv:1108.0829 [gr-qc].
- [59] R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research* (Wiley, Nueva York, 1962).
- [60] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
- [61] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [62] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory*, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
- [63] J. A. Wheeler, *Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics* en *Batelle Rencontres* (Nueva York, 1972), editado por C. M. DeWitt y J. A. Wheeler.
- [64] A. Ashtekar, *New Variables for Classical and Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).
- [65] A. Ashtekar, *Lectures on Nonperturbative Canonical Gravity* (World Scientific, Singapur, 1991).
- [66] J. F. Barbero G., *Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space Times*, Phys. Rev. D **51**, 5507 (1995), arXiv:gr-qc/9410014.

- [67] G. Immirzi, *Quantum Gravity and Regge Calculus*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **57**, 65 (1997), arXiv:gr-qc/9701052.
- [68] G. Immirzi, *Real and Complex Connections for Canonical Gravity*, Class. Quant. Grav. **14**, L177 (1997), arXiv:gr-qc/9612030.
- [69] A. Laddha y M. Varadarajan, *Polymer Quantization of the Free Scalar Field and Its Classical Limit*, Class. Quant. Grav. **27**, 175010 (2010), arXiv:1001.3505 [gr-qc].
- [70] A. Ashtekar y C. J. Isham, *Representations of the Holonomy Algebras of Gravity and Non-Abelian Gauge Theories*, Class. Quant. Grav. **9**, 1433 (1992), arXiv:hep-th/9202053.
- [71] A. Ashtekar y J. Lewandowski, *Representation Theory of Analytic Holonomy C^* Algebras*, arXiv:gr-qc/9311010.
- [72] J. C. Baez, *Generalized Measures in Gauge Theory*, Lett. Math. Phys. **31**, 213 (1994), arXiv:hep-th/9310201.
- [73] A. Ashtekar y J. Lewandowski, *Projective Techniques and Functional Integration for Gauge Theories*, J. Math. Phys. **36**, 2170 (1995), arXiv:gr-qc/9411046.
- [74] C. Fleischhack, *Proof of a Conjecture by Lewandowski and Thiemann*, Commun. Math. Phys. **249**, 331 (2004), arXiv:math-ph/0304002.
- [75] J. M. Velhinho, *The Quantum Configuration Space of Loop Quantum Cosmology*, Class. Quant. Grav. **24**, 3745 (2007), arXiv:0704.2397 [gr-qc].
- [76] M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space, III: Operational Methods and Group Theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **16**, 172 (1930).
- [77] J. von Neumann, *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren (The Uniqueness of the Schrödinger Operators)*, Math. Ann. **104**, 570 (1931).
- [78] A. Ashtekar, *Some Surprising Implications of Background Independence in Canonical Quantum Gravity*, Gen. Rel. Grav. **41**, 1927 (2009), arXiv:0904.0184 [gr-qc].
- [79] T. Thiemann, *Anomaly-Free Formulation of Non-Perturbative, Four-Dimensional Lorentzian Quantum Gravity*, Phys. Lett. B **380**, 257 (1996), arXiv:gr-qc/9606088.

- [80] T. Thiemann, *Quantum Spin Dynamics (QSD)*, Class. Quant. Grav. **15**, 839 (1998), arXiv:gr-qc/9606089.
- [81] A. Corichi y P. Singh, *Is Loop Quantization in Cosmology Unique?*, Phys. Rev. D **78**, 024034 (2008), arXiv:0805.0136 [gr-qc].
- [82] W. Kamiński y J. Lewandowski, *The Flat FRW Model in LQC: the Self-Adjointness*, Class. Quant. Grav. **25**, 035001 (2008), arXiv:0709.3120 [gr-qc].
- [83] D. Marolf, *Refined Algebraic Quantization: Systems with a Single Constraint*, arXiv:gr-qc/9508015.
- [84] D. Marolf, *Quantum Observables and Recollapsing Dynamics*, Class. Quant. Grav. **12**, 1199 (1995), arXiv:gr-qc/9404053.
- [85] D. Marolf, *Observables and a Hilbert Space for Bianchi IX*, Class. Quant. Grav. **12**, 1441 (1995), arXiv:gr-qc/9409049.
- [86] D. Marolf, *Almost Ideal Clocks in Quantum Cosmology: A Brief Derivation of Time*, Class. Quant. Grav. **12**, 2469 (1995), arXiv:gr-qc/9412016.
- [87] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourão y T. Thiemann, *Quantization of Diffeomorphism Invariant Theories of Connections with Local Degrees of Freedom*, J. Math. Phys. **36**, 6456 (1995), arXiv:gr-qc/9504018.
- [88] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Physical Evolution in Loop Quantum Cosmology: The Example of the Vacuum Bianchi I Model*, Phys. Rev. D **78**, 064008 (2008), arXiv:0804.3157 [gr-qc].
- [89] M. Martín-Benito, L. J. Garay y G. A. Mena Marugán, *Hybrid Quantum Gowdy Cosmology: Combining Loop and Fock Quantizations*, Phys. Rev. D **78**, 083516 (2008), arXiv:0804.1098 [gr-qc].
- [90] G. A. Mena Marugán, *A Brief Introduction to Loop Quantum Cosmology*, AIP Conf. Proc. **1130**, 89 (2009), arXiv:0907.5160 [gr-qc].
- [91] W. Kamiński y T. Pawłowski, *Cosmic Recall and the Scattering Picture of Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **81**, 084027 (2010), arXiv:1001.2663 [gr-qc].
- [92] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer-Verlag, Berlín, 1980).
- [93] M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I: Functional Analysis* (Academic Press, San Diego, 1980).

- [94] A. Galindo y P. Pascual, *Quantum Mechanics I* (Springer-Verlag, Berlín, 1990).
- [95] M. Domagała y J. Lewandowski, *Black Hole Entropy from Quantum Geometry*, Class. Quant. Grav. **21**, 5233 (2004), arXiv:gr-qc/0407051.
- [96] K. A. Meissner, *Black Hole Entropy in Loop Quantum Gravity*, Class. Quant. Grav. **21**, 5245 (2004), arXiv:gr-qc/0407052.
- [97] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd Edition)* (Cambridge University Press, Nueva York, 2007).
- [98] W. Greiner, L. Neise y H. Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (Springer-Verlag, Nueva York, 1995).
- [99] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [100] W. G. Unruh, *Notes on Black Hole Evaporation*, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [101] R. H. Brandenberger, H. Feldman y V. F. Mukhanov, *Classical and Quantum Theory of Perturbations in Inflationary Universe Models*, arXiv:astro-ph/9307016.
- [102] H. Weyl, *Quantenmechanik und Gruppentheorie*, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei **46**, 1 (1927).
- [103] B. Simon, *Topics in Functional Analysis* (Academic Press, Londres, 1972).
- [104] J. Glimm y A. Jaffe, *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*, (Springer, Nueva York, 1987), 2ª edición.
- [105] S. W. Hawking y G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [106] B. Allen, *Vacuum States in de Sitter Space*, Phys. Rev. D **32**, 3136 (1985).
- [107] T. S. Bunch y P. C. W. Davies, *Quantum Field Theory in de Sitter Space: Renormalization by Point Splitting*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **360**, 117 (1978).
- [108] R. Floreanini, C. T. Hill y R. Jackiw, *Functional Representation for the Isometries of de Sitter Space*, Ann. Phys. **175**, 345 (1987).
- [109] A. Ashtekar y A. Magnon, *Quantum Fields in Curved Space-Times*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **346**, 375 (1975).

- [110] A. Ashtekar y A. Magnon-Ashtekar, *A Curiosity Concerning the Role of Coherent States in Quantum Field Theory*, *Pramana* **15**, 107 (1980).
- [111] B. S. Kay, *Linear Spin 0 Quantum Fields in External Gravitational and Scalar Fields. 1. A One Particle Structure for the Stationary Case*, *Commun. Math. Phys.* **62**, 55 (1978).
- [112] A. Corichi, J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Quantum Gowdy T^3 Model: Schrodinger Representation with Unitary Dynamics*, *Phys. Rev. D* **76**, 124031 (2007), arXiv:0710.0277 [gr-qc].
- [113] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *A Unique Fock Quantization for Fields in Non-stationary Spacetimes*, *JCAP* **1010**, 030 (2010), arXiv:1004.5320 [gr-qc].
- [114] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Quantization of Fields with Unitary Dynamics in Nonstationary Spacetimes*, *Phys. Rev. D* **83**, 025002 (2011), arXiv:1101.2397 [gr-qc].
- [115] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *A Uniqueness Criterion for the Fock Quantization of Scalar Fields with Time Dependent Mass*, *Class. Quant. Grav.* **28**, 172001 (2011), arXiv:1106.5000 [gr-qc].
- [116] J. Cortez y G. A. Mena Marugán, *Feasibility of a Unitary Quantum Dynamics in the Gowdy T^3 Cosmological Model*, *Phys. Rev. D* **72**, 064020 (2005), arXiv:gr-qc/0507139.
- [117] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, *Unitary Evolution in Gowdy Cosmology*, *Phys. Rev. D* **73**, 041502 (2006), arXiv:gr-qc/0510109.
- [118] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, *Quantum Gowdy T^3 Model: A Unitary Description*, *Phys. Rev. D* **73**, 084020 (2006), arXiv:gr-qc/0603006.
- [119] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum y E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- [120] M. Pierri, *Probing Quantum General Relativity through Exactly Soluble Midisuperspaces. II: Polarized Gowdy Models*, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 135 (2002), arXiv:gr-qc/0101013.
- [121] A. Corichi, J. Cortez y H. Quevedo, *On Time Evolution in Quantum Gowdy T^3 Models*, *Rev. Mex. Fis.* **49S2**, 106 (2003).

- [122] C. G. Torre, *Quantum Dynamics of the Polarized Gowdy T^3 Model*, Phys. Rev. D **66**, 084017 (2002), arXiv:gr-qc/0206083.
- [123] J. F. Barbero G., D. Gómez Vergel y E. J. S. Villaseñor, *Evolution Operators for Linearly Polarized Two-Killing Cosmological Models*, Phys. Rev. D **74**, 024003 (2006), arXiv:gr-qc/0606068.
- [124] A. Corichi, J. Cortez y H. Quevedo, *On the Relation Between Fock and Schroedinger Representations for a Scalar Field*, Ann. Phys. **313**, 446 (2004), arXiv:hep-th/0202070.
- [125] J. F. Barbero G., D. Gómez Vergel y E. J. S. Villaseñor, *Quantum Unitary Evolution of Linearly Polarized $S^1 \times S^2$ and S^3 Gowdy Models Coupled to Massless Scalar Fields*, Class. Quant. Grav. **25**, 085002 (2008), arXiv:0711.1790 [gr-qc].
- [126] R. T. Jantzen, *Tensor Harmonics on the 3-Sphere*, J. Math. Phys. **19**, 1163 (1978).
- [127] E. Lifshitz y I. M. Khalatnikov, *Investigations in Relativistic Cosmology*, Adv. Phys. **12**, 185 (1963).
- [128] U. H. Gerlach y U. K. Sengupta, *Homogeneous Collapsing Star: Tensor and Vector Harmonics for Matter and Field Asymmetries*, Phys. Rev. D **18**, 1773 (1978).
- [129] D. Shale, *Linear Symmetries of Free Boson Fields*, Trans. Am. Math. Soc. **103**, 149 (1962).
- [130] R. Honegger y A. Rieckers, *Squeezing Bogoliubov Transformations on the Infinite Mode CCR-Algebra*, J. Math. Phys. **37**, 4292 (1996).
- [131] A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations* (Springer-Verlag, Nueva York, 1976).
- [132] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Unique Fock Quantization of Scalar Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D (*en prensa*), arXiv:1203.2525 [gr-qc].
- [133] M. Blau, M. O’Loughlin y L. Seri, *Aspects of Plane Wave (Matrix) String Dynamics*, arXiv:1112.3182 [hep-th].
- [134] M. Taylor, *Partial Differential Equations II* (Springer-Verlag, Nueva York, 1996).

- [135] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry* (Academic Press, Orlando, 1984).
- [136] D. Larson *et al.*, *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters*, *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 16 (2011), arXiv:1001.4635 [astro-ph.CO].
- [137] D. W. Olson, *Density Perturbations on Cosmological Models*, *Phys. Rev. D* **14**, 327 (1976).
- [138] G. F. R. Ellis y M. Bruni, *Covariant and Gauge Invariant Approach to Cosmological Density Fluctuations*, *Phys. Rev. D* **40**, 1804 (1989).
- [139] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Criteria for the Determination of Time Dependent Scalings in the Fock Quantization of Scalar Fields*, arXiv:1202.6330 [gr-qc].
- [140] D. Langlois, *Hamiltonian Formalism and Gauge Invariance for Linear Perturbations in Inflation*, *Class. Quant. Grav.* **11**, 389 (1994).
- [141] T. Cailleteau y A. Barrau, *Gauge Invariance in Loop Quantum Cosmology: Hamilton-Jacobi and Mukhanov-Sasaki Equations for Scalar Perturbations*, arXiv:1111.7192 [gr-qc].
- [142] A. Ashtekar, W. Kamiński y J. Lewandowski, *Quantum Field Theory on a Cosmological, Quantum Space-time*, *Phys. Rev. D* **79**, 064030 (2009), arXiv:0901.0933 [gr-qc].
- [143] L. J. Garay, M. Martín-Benito y G. A. Mena Marugán, *Inhomogeneous Loop Quantum Cosmology: Hybrid Quantization of the Gowdy Model*, *Phys. Rev. D* **82**, 044048 (2010), arXiv:1005.5654 [gr-qc].
- [144] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y E. Wilson-Ewing, *Hybrid Quantization: From Bianchi I to the Gowdy Model*, *Phys. Rev. D* **82**, 084012 (2010), arXiv:1006.2369 [gr-qc].
- [145] M. Martín-Benito, D. Martín-de Blas y G. A. Mena Marugán, *Matter in Inhomogeneous Loop Quantum Cosmology: the Gowdy T^3 Model*, *Phys. Rev. D* **83**, 084050 (2011), arXiv:1012.2324 [gr-qc].
- [146] A. D. Rendall, *Unique Determination of an Inner Product by Adjointness Relations in the Algebra of Quantum Observables*, *Class. Quant. Grav.* **10**, 2261 (1993), arXiv:gr-qc/9303026.

- [147] A. D. Rendall, *Canonical Gravity: From Classical to Quantum*, Lect. Not. Phys. **434**, 319 (1994), arXiv:gr-qc/9403001.
- [148] A. Ashtekar y R. S. Tate, *An Algebraic Extension of Dirac Quantization: Examples*, J. Math. Phys. **35**, 6434 (1994), arXiv:gr-qc/9405073.
- [149] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, NBS Appl. Math. Ser. Vol. **LV** (U.S. GPO, Washington, DC, 1970), 9^a edición.
- [150] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, editado por A. Jeffrey y D. Zwillinger (Academic Press, San Diego, 2000), 6^a edición.